Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
4. Übungsblatt für den 28. März 2011
(Korrigierte Version)

1. Sei V ein Vektorraum und M eine Teilmenge von V. Eine Relation $\sim$ auf V sei durch
$$x \sim y \iff x - y \in M$$
gegeben.
   (a) Zeigen Sie: Ist M ein Unterraum, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V.
   (b) Ist M ein Unterraum, so gilt $[x]_\sim = x + M$.
   (c) Gilt die Umkehrung von (a)?

2. Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch
$$x \sim y \iff \left\langle x - y, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$
gegeben.
   (a) Berechnen Sie die Äquivalenzklasse $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\sim$.
   (b) Finden Sie ein Repräsentantensystem für $V/\sim$.

3. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Auf M sei eine Relation $\leq$ durch
$$x \leq y \iff \exists m \in \mathbb{N}_0 : \ mx = y$$
gegeben.
   (a) Zeigen Sie: $\leq$ ist eine Ordnungsrelation.
   (b) Untersuchen Sie für $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: Ist $\leq$ linear? Welche Elemente von M sind minimal/maximal? Gibt es ein kleinstes Element? Ein größtes Element?
   (c) Ebenso für $M := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. (a) Geben Sie explizit $\mathrm{Part}(\{1, 2, 3\})$, die Menge aller Partitionen von $\{1, 2, 3\}$, an.
   (b) Zeigen Sie, dass $|\mathrm{Part}(\{1, 2, \dots, n\})| \geq 2^{n-2}$.
   (c) Zeigen Sie, dass $|\mathrm{Part}(\{1, 2, \dots, n\})| \leq n^n$.

5. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $\mathcal{U}$ die Menge aller Unterräume von V.

   (a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{U}, \subseteq)$ eine geordnete Menge ist.

   (b) Untersuchen Sie: Ist $\leq$ linear? Welche Elemente von M sind minimal/maximal? Gibt es ein kleinstes Element? Ein größtes Element?

6. Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Zeigen Sie:

   (a) Jedes größte Element von M ist ein maximales Element.

   (b) M hat höchstens ein größtes Element.

   (c) Hat M mindestens zwei (verschiedene) maximale Elemente, so hat M kein größtes Element.

7. Von einer Relation ρ auf einer Menge A weiß man, dass Sie symmetrisch, antisymmetrisch und reflexiv ist. Welche Relation kann ρ nur sein? Warum?

8. Sei A eine Menge. Für zwei Partitionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ auf A definieren wir

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{Q} \iff \forall x \in \mathcal{P}\ \exists y \in \mathcal{Q} :\ x \subseteq y.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $\leq$ ist reflexiv.

   (b) $\leq$ ist transitiv.

   (c) $\leq$ ist antisymmetrisch.