Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
14. Übungsblatt für den 27. Juni 2011

1. Sei U der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ mit Grad kleiner oder gleich 2.
   (a) Sei $h : U \to U$, $h(p) = p'$, wobei p' die übliche Ableitung ist. Zeigen Sie, dass h linear ist und berechnen Sie die Dimensionen und Basen von $\ker(h)$ und $\mathrm{im}(h)$.
   (b) Wie (a) für $h : U \to \mathbb{R}$, $h(p) = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$.

2. Sei V ein Vektorraum über K und sei U ein Unterraum von V.
   (a) Zeigen Sie, dass die Relation $\rho = \{(v, w) \,:\, v - w \in U\}$ eine Äquivalenzrelation auf V ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in V$ gilt $v/\rho = v + U$.
   (c) Zeigen Sie, dass V/U gleich der Faktormenge V/ρ ist.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x, 0, z) \,:\, x, z \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem für ρ.
   (b) Bestimmen Sie V/U.
   (c) Berechnen Sie $\dim(V/U)$.
   (d) Bestimmen Sie eine Basis von V/U.

4. Sei V ein Vektorraum über K und sei U ein Unterraum von V. Zeigen Sie folgende Aussage: Es ist $v + U = w + U$ genau dann, wenn $v - w \in U$.

5. Sei V ein Vektorraum über K und sei U ein Unterraum von V.
   (a) Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$. Beweisen Sie: Falls $v_1 + U, \ldots, v_m + U$ l.u. über K sind, dann sind auch $v_1, \ldots, v_m$ l.u. über K.
   (b) Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U und sei $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von V. Beweisen Sie, dass $(v_1 + U, \ldots, v_m + U)$ eine Basis von V/U ist.

6. Sei A eine $n \times n$ Matrix über einen Körper K und seien $p, q \in K[x]$. Zeigen Sie, dass gilt
$$\widehat{p}(A)\widehat{q}(A) = \widehat{q}(A)\widehat{p}(A).$$

7. Berechnen Sie die Matrizen B_0, B_1, B_2 aus dem Beweis von Satz 16.4 für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
und weisen Sie nach, dass $-B_0A$, $B_0 - B_1A$, $B_1 - B_2A$ und B_2 Diagonalmatrizen sind.

8. Zeigen Sie: Seien $n, m \in \mathbb{N}$, und sei h Endomorphismus von K^n mit $h^m = 0$. Dann gilt $h^n = 0$. Hier bedeutet $h^k = \underbrace{h \circ \cdots \circ h}_{k-\text{mal}}$.