Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
12. Übungsblatt für den 6.5.2011

1. Seien $p = x^2 + 1$ und $q = x - 1$ Polynome in $\mathbb{Q}[x]$. Finden Sie $z \in \mathbb{Q}[x]$ so, dass $z \cdot q - (3x + 2)$ durch $x^2 + 1$ teilbar ist.

2. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$. Diagonalisieren Sie die Matrix A falls möglich, oder begründen Sie warum A nicht diagonalisierbar ist (etwa mit Satz 14.22, den Sie verwenden dürfen).

3. Verwenden Sie etwa Satz 14.22 aus dem Skriptum zur Lösung des folgenden Beispiels.

   (a) Überprüfen Sie, ob $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist.

   (b) Sei K ein Körper und $2 \leq m \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in K$. Wir definieren die $m \times m$ Matrix J folgendermaßen. Für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt $J(i, i) = \lambda$. Für $i \in \{1, \dots, m-1\}$ gilt $J(i, i+1) = 1$ und alle anderen Matrixeinträge sind Null. (Die Matrix hat also in der Hauptdiagonale den Eintrag λ und oberhalb der Hauptdiagonale den Eintrag 1). So eine Matrix nennt man ein Jordankästchen zu λ vom Format m. Zeigen Sie, dass J nicht diagonalisierbar ist.

4. Die Fibonacci Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ ist folgendermaßen definiert: $F_0 = F_1 = 1$ und für $n \geq 2$ ist $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$.

   Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $F^{(n)} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Matrix A, sodass $F^{(n)} = A^n F^{(0)}$. Anschließend suchen Sie eine Formel für A^n (Diagonalisieren von A!).

5. Sei $A \in K^{n\times n}$, K ein Körper und seien λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2. Zeigen Sie, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

6. Sei $A \in K^{n\times n}$, K ein Körper und $A^T = A$. Seien λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2. Zeigen sie, dass v_1 und v_2 orthogonal sind (d.h: $v_1^T \cdot v_2 = 0$).

Definition: Sei $A \in K^{n\times n}$, K ein Körper. Dann ist $\sum_{i=1}^{n} A(i,i)$, also die Summe der Hauptdiagonalelemente, die **Spur von** A.

7. Seien $A, B \in K^{n\times n}$ und sei B invertierbar. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n}(A \cdot B)(i,i) = \sum_{i=1}^{n}(B \cdot A)(i,i)$ (die Matrizen $A \cdot B$ und $B \cdot A$ haben die selbe Spur).

8. Sei $A \in K^{n\times n}$ so, dass A die n verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat. Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 14.22 des Skriptums und dem vorangegangenem Übungsbeispiel:

   (a) $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   (b) Die Spur von A ist die Summe der Eigenwerte von A.