Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
11. Übungsblatt für den 30.5.2011

1. (a) Sei K ein Körper und $K[x]$ die Menge aller Polynome über diesem Körper. Zeigen Sie, dass $K[x]$ ein Vektorraum über dem Körper K ist.
   (b) Sei K ein Körper und $M_1 := \{a_1x + \ldots + a_nx^n | n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in K\}$ die Menge aller Polynome vom Grad größer gleich 1 inklusive dem Nullpolynom über diesem Körper. Zeigen Sie, dass M_1 ein Vektorraum über dem Körper K ist.
   (c) Sei K ein Körper, $m \in \mathbb{N}$ und M_2 die Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich m. Zeigen Sie, dass M_2 ein Vektorraum über K ist.
   (d) Bestimmen Sie in allen obigen Fällen die Dimension und eine Basis und machen Sie sich bewusst, dass Sie mit Beispiel (a) und (b) Beispiele für Vektorräume U und V gefunden haben, so dass $U \subset V$ aber $dimU = dimV$.
   (e) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen sie eine Basis und die Dimension von $U = L(1-2x^2, 2+x+x^3, 3+x-2x^2+7x^3, 2+4x^3)$.

2. Sei K ein Körper und $p \in K[x]$. Die von einem Polynom p auf $K[x]$ induzierte Polynomfunktion wird im folgenden der Einfachheit halber mit $\overline{p}$ bezeichnet.
   (a) Zeigen Sie, dass $V := \{\overline{p} | p \in K[x]\}$ ein Vektorraum über K ist.
   (b) Zeigen Sie für einen endlichen Körper K, dass stets $|V| < |K[x]|$ ($|M|$ bezeichne die Mächtigkeit der Menge M).
   (c) Finden Sie ein Polynom $p \in \mathbb{Z}_5$ so dass $\overline{p}$ die Nullfunktion ist, p aber nicht das Nullpolynom ist.

3. Sei $p = 2x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ und $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$, $x \mapsto 2^x$. Die von einem Polynom p auf $\mathbb{Z}_3$ induzierte Polynomfunktion wird im folgenden der Einfachheit halber mit $\overline{p}$ bezeichnet.
   (a) Bestimmen Sie $\overline{p}$.
   (b) Zerlegen Sie p in eine Produkt irreduzibler Faktoren.
   (c) Finden Sie ein Polynom q von kleinstmöglichem Grad in $\mathbb{Z}_3[x]$, so dass $\overline{q} = \overline{p}$.
   (d) Finden Sie ein Polynom $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ so dass $\overline{g} = f$. (So ein Polynom muss laut Übungsblatt 7, Beispiel 8 existieren.)

4. Sei $p = x^6 + x^4 + 2x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von p und zerlegen Sie p in irreduzible Faktoren.

5. Zeigen Sie für ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, wobei p' die übliche Ableitung ist, dass $\frac{p}{ggt(p,p')}$ nur einfache Nullstellen hat.

6. Seien $f = x^5+1$ und $g = x^3+x+1$ Polynome in $\mathbb{Z}_2$. Berechnen Sie $ggT(f, g)$ und bestimmen Sie $u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$ so, dass $ggT(f, g) = uf + vg$.

7. Zeigen Sie: $x^m - 1 \in \mathbb{R}[x]$ ist genau dann ein Teiler von $x^n - 1 \in \mathbb{R}[x]$ wenn $m|n$.

8. Zeigen Sie, dass jedes $f \in K[x]$ (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt $f = k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ mit $k \in K$ und irreduziblen und normierten $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ darstellbar ist.

   Hinweis:

   Sie können zum Beispiel folgendermaßen vorgehen: Wir machen Induktion nach dem Grad n von f.

   Induktionsanfang: Sei f vom Grad 1.

   Induktionshypothese: Die Aussage gelte für alle Polynome f vom Grad n.

   Induktionsschluss: Zeige die Aussage für Polynome vom Grad $n + 1$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung f reduzibel bzw. f irreduzibel.

   Anschließend machen Sie sich Gedanken über die Eindeutigkeit.