Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
10. Übungsblatt für den 23. Mai 2011

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme, falls möglich mittels Cramerscher Regel.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass
$$x = ua + vb.$$
Zeigen Sie: Wenn x sowohl a als auch b teilt, dann gilt $x = \mathrm{ggT}(a, b)$.

3. Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ so, dass $a \mid y$, $b \mid y$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie $ab \mid y$, ohne die Primfaktorzerlegung zu benutzen.

4. Sei p_n die n-te Primzahl, d.h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie, ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass gilt: Wenn
$$a = \prod p_i^{\alpha_i},$$
$$b = \prod p_i^{\beta_i},$$
wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$ und fast alle α_i, $\beta_i = 0$ sind, dann gilt $a \mid b$ genau dann, wenn wenn für alle i gilt: $\alpha_i \leq \beta_i$.

5. (*Erweiterter Euklidischer Algorithmus*) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass
$$147x + 33y = 12.$$
Wann hat die lineare diophantische Gleichung $ax + by = c$ für vorgegebene $a, b, c \in \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Lösung $x, y \in \mathbb{Z}$?

6. (*Binärer Euklidischer Algorithmus*) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Zeigen Sie, dass das folgende Verfahren den größten gemeinamen Teiler von a und b liefert:

```
k ← 0
while a ≠ b do
    if 2 | a ∧ 2 | b then
        a ← a/2
        b ← b/2
        k ← k + 1
    elseif 2 | a ∧ ¬2 | b then
        a ← a/2
    elseif ¬2 | a ∧ 2 | b then
        b ← b/2
    else
        if a > b then
            a ← (a − b)/2
        else
            b ← (b − a)/2
        endif
    endif
endwhile
return 2^k a
```

7. (*Satz 13.17*) Sei K ein kommutativer Ring mit Eins und seien p, q, r Polynome über K. Zeigen Sie:

(a) $p \cdot q = q \cdot p$.

(b) $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$.

8. Sei K ein kommutativer Ring mit Eins und seien p, q Polynome über K. Zeigen Sie: Für alle $y \in K$ gilt $(p + q)^K(y) = p^K(y) + q^K(y)$.