Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
8. Übungsblatt für den 9. Mai 2011

1. (*Blockmatrizen*) Sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{n \times m}$, und $C \in K^{m \times m}$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

Hinweis: Induktion nach n.

2. Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn ein $v \in K^n$, $v \neq 0$, existiert mit $A \cdot v = \lambda v$.

(b) Falls A invertierbar ist und λ ist ein Eigenwert von A, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}. (Insbesondere ist zu zeigen, dass $\lambda \neq 0$.)

(c) Falls $A = A^2$, dann können nur 0 und 1 Eigenwerte von A sein.

3. Sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ und gilt $Bv \neq 0$, dann ist Bv ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

(b) AB und BA haben die gleichen Eigenwerte.

4. Sei K ein Körper. Auf $K^{n \times n}$ definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine invertierbare Matrix } P \text{ mit } B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie: Wenn $A \sim B$ gilt, dann haben A und B das gleiche charakteristische Polynom.

(c) Finden Sie zwei Matrizen A und B, die das gleiche charakteristische Polynom haben, für die aber nicht $A \sim B$ gilt.

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Bestimmen Sie ein $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

6. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie ein $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $P^{-1}BP$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Gibt es eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $Q^{-1}BQ$ eine Diagonalmatrix ist und ebenso $Q^{-1}AQ$ für A aus Beispiel 5?

7. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem ist gegeben durch

$$y'(t) = A \cdot y(t).$$

Zeigen Sie

(a) Die Lösungen $L_0 = \{\varphi(t) : \varphi'(t) = A \cdot \varphi(t)\}$ des Differentialgleichungssystems bilden einen Untervektorraum.

(b) $\varphi(t) = e^{\lambda t} v \neq 0$ ist eine Lösung von $y'(t) = A \cdot y(t)$ genau dann, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(c) Wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind, dann sind auch $\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \ldots, \varphi^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} v_k$ linear unabhängig.

8. Das homogene lineare Differentialgleichungssystem sei gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung, die die Bedingung $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$ erfüllt.