Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
7. Übungsblatt für den 2.5.2011

1. (a) Wieviele Zyklen der Länge 4 enthält die S_n, $n \geq 4$.

   (b) Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

      i. Zerlegen Sie π in ein Produkt von Zyklen.

      ii. Zerlegen Sie π in ein Produkt von Transpositionen.

      iii. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion π^{-1}.

2. Für welche $n \in \mathbb{N}$ liegen die folgenden Permutationen in A_n, haben also gerade Signatur?

   (a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & . & . & . & n & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . & . & . & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & . & . & . & n & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

3. Sei n ungerade und $A \in K_n^n$, wobei K ein Körper ist, in dem $1+1 \neq 0$. Es gelte $A^T = -A$.

   (a) Zeigen Sie, dass $det(A) = 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass aus $A^T = -A$ in einem Körper mit $1+1 \neq 0$ folgt, dass $A(i,i) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Berechnen Sie folgende Determinante über einem Körper K:

$$\begin{vmatrix} n-2 & n-2 & n-1 & n \\ n-2 & n-1 & n & n+1 \\ n-1 & n & n+1 & n+2 \\ n & n+1 & n+2 & n+2 \end{vmatrix}$$

5. Sei $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$. Berechnen Sie $det(A^{-1})$.

6. Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $det(A \cdot A^T)$.

7. Seien $a_1, \dots a_n \in K$, K ein Körper. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & . & . & . & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & . & . & . & a_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & . & . & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, auch elementare Spaltenumformungen zu machen. Wegen der Tatsache, dass für eine Matrix A gilt $det(A) = det(A^T)$ ist dies beim Berechnen der Determinante oft hilfreich.

8. (Eindeutigkeit einer Polynomfunktion vom Grad n durch $n+1$ Punkte) Gegeben Seien $n+1$ Punkte ($n \in \mathbb{N}_0$) $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ in K^2, K ein beliebiger Körper. Weiters gilt $\forall i \in \{1, \dots n+1\} \forall j \in \{1, \dots n+1\} : i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ (die Elemente x_i sind also paarweise verschieden). Mit $a_0, \dots, a_n \in K$ definiert man eine Funktion $f : K \longrightarrow K, x \mapsto a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ und nennt so eine Funktion eine Polynomfunktion vom Grad n ($\cdot$ ist die Körpermultiplikation).

   (a) Zeigen Sie unter Verwendung von Beispiel 7, dass es unter den gegebenen Vorraussetzungen eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion f gibt mit $\forall i \in \{1, \dots, n+1\} : f(x_i) = y_i$.

   (b) Sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen, etwa $\mathbb{Z}_p$, (p eine Primzahl). Zeigen sie, dass es für jede Funktion g von K nach K eine Polynomfunktion f von K nach K gibt, so dass $g = f$.

   (c) Finden Sie für den Körper $\mathbb{Z}_3$ und die Funktion $g : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3, 0 \mapsto 2, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 2$ die entsprechende Polynomfunktion h mit $g = h$.