Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
5. Übungsblatt für den 4.4.2011

1. (a) Seien m, n natürliche Zahlen. Zeigen Sie durch explizite Angabe einer bijektiven Funktion, dass $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ gleichmächtig zu $\{1, 2, \ldots m \cdot n\}$.

   (b) Zeigen Sie durch explizite Angabe einer bijektiven Funktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei $0 \notin \mathbb{N}$) $\mathbb{Z} \times [0, n[$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist. (Hinweis: Division durch n).

   (c) Zeigen Sie durch explizite Angabe einer bijektiven Funktion, dass die Intervalle $]0, 1]$ und $[1, \infty[$ gleichmächtig sind.

2. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Zeigen Sie: die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ sind gleichmächtig. (Hinweis: Finden Sie eine (etwa lineare) Funktion die a nach c und b nach d abbildet).

3. Seien A_1, A_2, B_1 und B_2 Mengen, so dass $A_1 \sim A_2$ und $B_1 \sim B_2$, wobei $\sim$ die Gleichmächtigkeitsrelation ist.

   (a) Zeigen Sie $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.

   (b) Zeigen Sie $P(A_1) \sim P(A_2)$. ($P(M)$ bezeichne die Potenzmenge von M).

4. Sei A eine nichtleere Menge. Zeigen Sie durch Angabe einer bijektiven Funktion, dass $P(A) \sim \{0, 1\}^A$. ($\{0, 1\}^A$ ist die Menge aller Funktionen von A nach $\{0, 1\}$).

5. (a) Zeigen Sie, dass für jedes a mit $a \notin \mathbb{N}$ die Menge $\{a\} \cup \mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

   (b) Wir können reelle Zahlen im Intervall $[0, 1[$ immer als unendliche Dezimalzahlen darstellen wenn man einfach Nullen an eine Dezimalzahl mit endlich vielen Dezimalstellen setzt. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden wählen wir für eine Dezimalzahl immer die endliche Darstellung, falls verfügbar, also 0,2 anstatt 0,1999... und hängen Nullen dran (sonst wäre folgendes f nicht wohldefiniert).

      Nun kann man eine Abbildung f folgendermaßen definieren:

      $f : [0, 1[\times [0, 1[\longrightarrow [0, 1[, \ (0.a_1a_2..., 0.b_1b_2...) \mapsto (0.a_1b_1a_2b_2...)$.

      Zeigen Sie, f ist injektiv aber nicht bijektiv.

   (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Schröder-Bernstein, dass $[0, 1[\times [0, 1[$ gleichmächtig zu $[0, 1[$ ist.

6. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Schröder-Bernstein, dass für beliebige Mengen A, B, C gilt:

$$(A \sim C \wedge A \subseteq B \subseteq C) \Rightarrow A \sim B$$

Finden Sie drei paarweise verschiedene Mengen A, B, C als Beispiel für diesen Satz.

7. Seien A und B Mengen, so dass es eine surjektive Funktion s von A auf B gibt, also $s(A) = B$. Zeigen Sie, dass es dann auch eine injektive Funktion von B nach A gibt. (Hinweis: Betrachten Sie die Urbilder der Elemente aus B unter der Funktion s und verwenden Sie das Auswahlaxiom.)

8. (Vergleichbarkeitssatz) Seien M und N zwei (nichtleere) Mengen. Dann gilt: Es gibt eine injektive Abbildung von M nach N oder von N nach M.

Beweis: Wir betrachten die Menge

$A = \{(X, f, Y) | X \subseteq M, Y \subseteq N, f \textit{ ist eine bijektive Funktion von } X \textit{ nach } Y\}.$

(A ist nicht leer, da es für X und Y einelementig sicher so ein f gibt.) Auf A definieren wir folgende Ordnung: $(X_1, f_1, Y_1) \leq (X_2, f_2, Y_2)$ genau dann wenn $X_1 \subseteq X_2$ und $Y_1 \subseteq Y_2$ und $f_1 = f_2|_{X_1}$ (f_1 ist die Einschränkung von f_2 auf X_1). $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf A. Das müssen Sie nicht nachweisen. Sei $K = \{(X_i, f_i, Y_i)|i \in I\}$ (I eine geeignete Indexmenge) eine Kette bzgl. $\leq$ in A. **Zeigen Sie**, dass K eine obere Schranke besitzt.

Hinweis: (X, f, Y) mit $X = \cup_{i\in I} X_i$, $Y = \cup_{i\in I} Y_i$ und $f : X \to Y, x \mapsto f_i(x)$ für $x \in X_i$ ist die gesuchte obere Schranke. Im Wesentlichen ist zu zeigen, dass f eine Funktion und f bijektiv ist. $X \subseteq M$ und $Y \subseteq N$ ist klar.

Fortsetzung: Sei nun (X, f, Y) eine maximales Element in A (wieso existiert dieses?). **Zeigen Sie** nun, dass $X = M$ (in diesem Fall ist $f : M \to Y$ bijektiv, also $f : M \to B$ injektiv da $Y \subseteq B$) oder $Y = N$. In diesem Fall ist $f^{-1} : N \to X$ bijektiv, also $f^{-1} : N \to M$ injektiv.