Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
3. Übungsblatt für den 21. März 2011

1. Eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $h(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(E, E)$, wobei E die kanonische Basis ist.

2. Sei
$$T := L(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix})$$
und sei $P_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalprojektion auf T.

   (a) Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^2$ an, die
   $$S_{P_T}(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   erfüllt.

   (b) Berechnen Sie daraus die Abbildungsmatrix $S_{P_T}(E, E)$ von P_T bezüglich der kanonischen Basis E.

3. Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jene lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x + y + z = 0$ spiegelt.

   (a) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, sodass
   $$S_h(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bestimmen Sie $S_{\mathrm{id}}(B, E)$. (id ist die identische Abbildung und E ist die kanonische Basis).

   (c) Bestimmen Sie $S_{\mathrm{id}}(E, B)$.

   (d) Bauen Sie $S_h(E, E)$ aus den in Teil (a)–(c) gefundenen Matrizen zusammen.

4. Seien U, V Vektorräume über K und sei h eine bijektive lineare Abbildung von U auf V.

   (a) Zeigen Sie, dass auch $h^{-1} : V \to U$ linear ist.

   (b) Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \dots, c_n)$ eine Basis von V. Zeigen Sie $S_{h^{-1}}(C, B) = S_h(B, C)^{-1}$.

5. Geben Sie eine Relation an, die ...
   (a) ... reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
   (b) ... reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch ist.
   (c) ... reflexiv, nicht transitiv und symmetrisch ist.
   (d) ... reflexiv, nicht transitiv und nicht symmetrisch ist.
   (e) ... nicht reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
   (f) ... nicht reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch ist.
   (g) ... nicht reflexiv, nicht transitiv und nicht symmetrisch ist.

6. Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, und seien $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $(a, b) \in \rho$
   (b) $a \in [b]_\rho$
   (c) $[a]_\rho \cap [b]_\rho \neq \emptyset$
   (d) $[a]_\rho = [b]_\rho$

7. Auf der Menge $M := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ist eine Äquivalenzrelation ρ durch

   $$a \,\rho\, b :\iff a - b \text{ ist ohne Rest durch 2 teilbar}$$

   gegeben.
   (a) Geben Sie M/ρ explizit an.
   (b) Geben Sie ein Repräsentantensystem von M modulo ρ an.

8. (a) Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f : A \to A$ die Relation

   $$K_f := \{(a, b) | f(a) = f(b)\}$$

   eine Äquivalenzrelation auf A ist.
   (b) Zeigen Sie, dass zu jeder Äquivalenzrelation ρ auf A eine geeignete Funktion $f : A \to A$ mit $\rho = K_f$ existiert. (Hinweis: ρ hat nach dem Auswahlaxiom ein Repräsentantensystem.)