Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
2. Übungsblatt für den 14. März 2011

1. Einen kommutativen Ring $\langle R, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ mit Eins nennt man einen *Integritätsbereich*, wenn für $x, y \in R$ mit $x \cdot y = 0$ gilt entweder $x = 0$ oder $y = 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass in einem Integritätsbereich die sog. *Kürzungsregel* gilt, d.h. falls $x, y, z \in R$, $x \neq 0$, und $x \cdot y = x \cdot z$, dann folgt $y = z$. Begründen Sie jeden einzelnen Zwischenschritt.
   (b) Zeigen Sie, dass jeder Körper ein Integritätsbereich ist.

2. (a) Zeigen Sie, dass in einem kommutativen Ring mit Eins das Einselement eindeutig bestimmt ist. D.h. falls $e \in R$ mit $x \cdot e = x$ für alle $x \in R$, dann gilt $e = 1$.
   (b) Zeigen Sie, dass es in einem Körper für jedes $x \neq 0$ *genau* ein y gibt mit $x \cdot y = 1$.

3. Sei K ein Körper und $\langle V, +, -, \mathbf{0}, *\rangle$ ein Vektorraum über K. Zeigen Sie:
   (a) Für $x \in V$ gilt $0 * x = \mathbf{0}$, wobei 0 das Nullelement in K ist.
   (b) Für $\alpha \in K$ gilt $\alpha * \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
   (c) Für $x \in V$ gilt $-x = (-1) * x$.
   (d) Falls für $\alpha \in K$ und $x \in V$ gilt $\alpha * x = \mathbf{0}$, dann ist $\alpha = 0$ oder $x = \mathbf{0}$.

4. Zeigen Sie, dass jeder *endliche* Integritätsbereich mit mindestens 2 Elementen bereits ein Körper ist. Gilt diese Aussage auch für unendliche Integritätsbereiche?

5. Bestimmen Sie ob im folgenden Vektorräume über K gegeben sind:
   (a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $K = \mathbb{R}$, $x + y := xy$ (die normale Multiplikation in $\mathbb{R}$) und $\lambda * x := x^\lambda$ für $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ eine Funktion}\}$, $K = \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda * f)(x) := \lambda f(x)$ für $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ eine Funktion}\}$, $K = \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda * f)(x) := f(\lambda x)$ für $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 5}$. Bestimmen Sie eine Basis von $N(A)$ und $Z(A)$ über $\mathbb{Z}_2$.

7. Eine Lineare Abbildung h von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ bildet die Vektoren der Basis $(\binom{3}{1}, \binom{0}{3})$ auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (in dieser Reihenfolge) ab. Bestimmen Sie $h(\binom{5}{5})$.

8. (a) Seien U, V Vektorräume über K und sei $h : U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie $h(0) = 0$.
   (b) Seien U, V Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $h : U \to V$ eine lineare Abbildung und $\{x \in U \mid h(x) = 0\} = \{0\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $x \in U$ und $y \in U$ linear unabhängig sind, dann auch $h(x)$ und $h(y)$.
   (c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist und $h \neq 0$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$: Wenn x und y linear unabhängig sind, dann auch $h(x)$ und $h(y)$.