Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
1. Übungsblatt für den 7. März 2011

1. Sei $U = \{(x, y, z) | x - 3y + 2z = 0\}$. Bestimmen Sie eine Matrix P_U, sodass die orthogonale Projektion von $v \in \mathbb{R}^3$ auf U gleich $P_U \cdot v$ ist. Bestimmen Sie $P_u \cdot P_U$.

2. Sei U wie in Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Matrix $P_{U^\perp}$, sodass die orthogonale Projektion von $v \in \mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ gleich $P_{U^\perp} \cdot v$ ist. Bestimmen Sie $P_U \cdot P_{U^\perp}$.

3. Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und sei $(b_1, \ldots, b_k)$ eine ONB von U.

   (a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
   $$P_U(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle b_i, x\rangle b_i.$$
   Bemerkung: Ist $U = \mathbb{R}^n$, dann ist $P_U(x) = x$ und man erhält die Aussage aus Satz 7.11 aus der Vorlesung.

   (b) Folgern Sie aus (a), dass $\|P_U(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle b_i, x\rangle|^2$.

   (c) Angenommen $U = L(v)$ mit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Zeigen Sie, dass
   $$P_U(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$
   Bemerkung: Also die allgemeine Definition der orthogonalen Projektion stimmt mit der Projektionseigenschaft des Skalarprodukts aus Kapitel 1 der Vorlesung überein.

4. Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

   (a) Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion auf U eine lineare Abbildung ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $P_U(\lambda x + \mu y) = \lambda P_U(x) + \mu P_U(y)$.

   (b) Zeigen Sie, dass $P_U \circ P_U = P_U$ ("Idempotenz").

   (c) Angenommen für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x, y\rangle = 0$. Gilt dann auch $\langle P_U(x), P_U(y)\rangle = 0$?

5. Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, sei $U = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, v\rangle = d\}$ und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie
   $$\operatorname{dist}(p, U) = \frac{|\langle p, v\rangle - d|}{\|v\|}.$$

6. Sei $G = g + L(v)$ in $\mathbb{R}^n$ und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie
   $$\operatorname{dist}(p, G)^2 = \|p - g\|^2 - \frac{\langle v, p - g\rangle^2}{\|v\|^2}.$$

7. Sei $p = (8, 10, 1, 14) \in \mathbb{R}^4$ und sei $U = L((-1, -2, 0, 3))$. Welcher Punkt $p_0 \in U$ hat von p den kleinsten Abstand und wie groß ist dieser Abstand?

8. Sei $M_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und sei $M_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie jene Punkte auf M_1 und M_2 die voneinander den geringsten Abstand haben. Wie groß ist dieser Abstand.