# Teil 5

# Analyse linearer Abbildungen

KAPITEL 12

# Determinanten

## 1. Volumen eines Parallelepipeds

Sei $A = \begin{pmatrix} -z_1- \\ -z_2- \\ \vdots \\ -z_m- \end{pmatrix}$ eine reelle $m \times m$-Matrix. Das *von den Zeilen von A aufgespannte Parallelepiped* ist die Teilmenge

$$\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot z_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0, 1]\}$$

von $\mathbb{R}^m$. Wir versuchen jetzt, das Volumen dieses Parallelepipeds zu messen, und schreiben $D(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ für dieses Volumen.

Ohne den Begriff Volumen im $\mathbb{R}^m$ definiert zu haben, könnte man vermuten, dass eine Funktion $D : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, die dieses Volumen misst, folgende Eigenschaften hat. Da wir die Eigenschaften nicht nur für $\mathbb{R}$ benötigen, formulieren wir diese Eigenschaften für einen kommutativen Ring mit Eins $K$. $D$ ist dann eine Funktion von $K^m \times \cdots \times K^m$ nach $K$.

(D1) Für alle $z_1, \ldots, z_m, y \in K^m$, $\alpha, \beta \in K$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\begin{aligned} &D(z_1, \ldots, z_{i-1},\ \alpha * z_i + \beta * y,\ z_{i+1}, \ldots, z_m) \\ &\qquad = \alpha\, D(z_1, \ldots, z_{i-1},\ z_i,\ z_{i+1}, \ldots, z_m) \\ &\qquad\qquad + \beta\, D(z_1, \ldots, z_{i-1},\ y,\ z_{i+1}, \ldots, z_m). \end{aligned}$$

Eine Funktion $D$, die diese Eigenschaft besitzt, nennen wir *multilinear*.

(D2) Für alle $z_1, \ldots, z_m$ gilt: wenn es $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gibt, sodass $i \neq j$ und $z_i = z_j$, so gilt

$$D(z_1, \ldots, z_m) = 0.$$

Eine Funktion $D$, die diese Eigenschaft besitzt, nennen wir *alternierend*.

(D3) Für die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_m$ im $K^m$ gilt

$$D(e_1, \ldots, e_m) = 1.$$

SATZ 12.1. *Sei $K$ ein kommutativer Ring mit 1, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $D : (K^m)^m \to K$ eine Abbildung, die (D1), (D2) und (D3) erfüllt, seien $z_1, \ldots, z_m \in K^m$, $\alpha \in K$, und seien $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$. Dann gilt*

(1) $D(z_1, \ldots, z_{j-1},\ \alpha * z_i + z_j,\ z_{j+1}, \ldots, z_m) = D(z_1, \ldots, z_m)$.

(2) *Wenn $i < j$, so gilt*

$$D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_j,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_i, z_{j+1}, \dots, z_m) = -D(z_1, \dots, z_m).$$

*Beweis:*

(1) Wegen der Multilinearität von $D$ gilt $D(z_1, \dots, z_{j-1}, \alpha * z_i + z_j, z_{j+1}, \dots, z_m) = \alpha D(z_1, \dots, z_{j-1},\ z_i,\ z_{j+1}, \dots, z_m) + D(z_1, \dots, z_m)$. Da $D$ alternierend ist, ist der erste Summand gleich 0.

(2) Da $D$ alternierend ist, gilt

$$D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_i + z_j,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_i + z_j,\ z_{j+1}, \dots, z_m) = 0.$$

Wegen der Multlinearität gilt also

$$\begin{aligned}
0 &= D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_i,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_i, z_{j+1}, \dots, z_m) \\
&\quad + D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_i,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_j, z_{j+1}, \dots, z_m) \\
&\quad + D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_j,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_i,\ z_{j+1}, \dots, z_m) \\
&\quad + D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_j,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_j, z_{j+1}, \dots, z_m) \\
&= 0 + D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_i,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_j, z_{j+1}, \dots, z_m) \\
&\quad + D(z_1, \dots, z_{i-1},\ z_j,\ z_{i+1}, \dots, z_{j-1},\ z_i,\ z_{j+1}, \dots, z_m) + 0.
\end{aligned}$$

■

## 2. Permutationen

DEFINITION 12.2. Sei $X$ eine Menge, $n \in \mathbb{N}$. Eine *Permutation von $X$* ist eine bijektive Abbildung von $X$ nach $X$. Die Menge aller Bijektionen auf $X$ kürzt man auch mit $S_X$, die Menge aller Bijektionen auf $\{1, \dots, m\}$ mit $S_m$ ab.

Permutationen von $\{1, \dots, m\}$ kann man durch die Wertetabelle angeben. So beschreibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

die Abbildung $f = \{(1,3), (2,2), \dots, (7,5)\}$; es gilt also $f(1) = 3, \dots, f(7) = 5$.

DEFINITION 12.3 (Signatur). Sei $f : \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, m\}$ eine bijektive Abbildung. Wir definieren die *Signatur* von $f$ durch

$$\operatorname{sgn}(f) := \prod_{(i,j) \in \{(k,l) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,m\} \mid k<l\}} \frac{f(i) - f(j)}{i - j}.$$

SATZ 12.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$, und seien $f, g \in S_m$. Sei $k$ die Anzahl der Elemente der Menge*

$$\{(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\}^2 \mid i < j \text{ und } f(i) > f(j)\}.$$

*Dann gilt:*

(1) $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^k$.

(2) $\operatorname{sgn}(f \circ g) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g)$.
(3) $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$.
(4) $\operatorname{sgn}(f^{-1}) = \operatorname{sgn}(f)$.

*Beweis:* (1) $\operatorname{sgn}(f) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} f(i) - f(j)}{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} i - j}$. Für den Zähler dieses Produkts gilt:

$$\prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} f(i) - f(j)$$
$$= \Big(\prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j \text{ und } f(i)<f(j)}} f(i) - f(j)\Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j \text{ und } f(i)>f(j)}} f(j) - f(i)\Big) \cdot (-1)^k.$$

Wir behaupten nun, dass dieses Produkt gleich $(-1)^k \prod\limits_{\substack{(s,t)\in\{1,\dots,m\}^2\\ s<t}} (s - t)$ ist. Seien $a, b$ so, dass $f(a) = s$ und $f(b) = t$. Wenn $a < b$, so tritt der Faktor $s - t$ im ersten Produkt auf, wenn $b < a$, so tritt der Faktor $s - t$ im zweiten Produkt auf. (2) Es gilt

$$\operatorname{sgn}(f \circ g) = \frac{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} f(g(i)) - f(g(j))}{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} i - j} \tag{12.1}$$
$$= \frac{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} f(g(i)) - f(g(j))}{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} g(i) - g(j)} \cdot \frac{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} g(i) - g(j)}{\prod\limits_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} i - j}.$$

Für den ersten Bruch in der rechten Seite von (12.1) gilt

$$\begin{aligned}
&\prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j}} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)}\\
&\quad= \prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j \text{ und } g(i)<g(j)}} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)} \cdot \prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j \text{ und } g(i)>g(j)}} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)}\\
&\quad= \prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j \text{ und } g(i)<g(j)}} \frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)} \cdot \prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\\ i<j \text{ und } g(i)>g(j)}} \frac{f(g(j))-f(g(i))}{g(j)-g(i)}\\
&\quad= \prod_{\substack{(s,t)\in\{1,\dots,m\}^2\\ s<t}} \frac{f(s)-f(t)}{s-t} = \operatorname{sgn}(f).
\end{aligned}$$

Der zweite Bruch in der rechten Seite von (12.1) ist $\operatorname{sgn}(g)$. (3) folgt unmittelbar aus der Definition der Signatur. (4) $\operatorname{sgn}(f^{-1}) \cdot \operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn}(f^{-1} \circ f) = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. ∎

DEFINITION 12.5 (Zyklen). Seien $i_1, i_2, \dots, i_n$ paarweise verschiedene Zahlen in $\{1, \dots, m\}$. Dann bezeichnen wir mit $(i_1\ i_2\ i_3\ \dots\ i_n)$ die Permutation $f$ mit $f(i_1) = i_2, \dots, f(i_{n-1}) = i_n$, $f(i_n) = i_1$, $f(k) = k$ für alle $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$.

Für $i \neq j$ bezeichnen wir den Zweierzyklus $(i\ \ j)$ auch als *Transposition*.

SATZ 12.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, und sei $\sigma \in S_m$.*

(1) *$\sigma$ ist ein Produkt von endlich vielen Transpositionen. (Das Produkt von 0 Transpositionen definieren wir dabei als* id.*)*
(2) *Wenn $i \neq j$, so gilt* $\operatorname{sgn}((i\ \ j)) = -1$.
(3) *Für alle Transpositionen $\rho_1, \dots, \rho_k$ und $\tau_1, \dots, \tau_l$ mit $\sigma = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_l$ teilt 2 die Differenz $k - l$.*
(4) *Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ gilt*

$$\operatorname{sgn}((i_1\ i_2\ \dots\ i_n)) = (-1)^{n+1}.$$

*Beweis:* (1) Sei

$$M(\sigma) := \max(\{0\} \cup \{k \in \{1, \dots, m\} \mid \sigma(k) \neq k\}).$$

Wir zeigen nun mit Induktion nach $n$, dass alle Permutationen mit $M(\sigma) = n$ Produkt von Transpositionen sind. Für $n = 0$ gilt $\sigma = \mathrm{id}$; $\sigma$ ist dann also das Produkt von 0 Transpositionen. Sei nun $n \geq 1$, und sei $\sigma$ so, dass $M(\sigma) = n$. Sei $k := \sigma(n)$. Es gilt $k < n$. Sei $\rho := (k\ n) \circ \sigma$. Es gilt $\rho(n) = n$ und $\rho(r) = r$ für alle $r > n$. Also gilt $M(\rho) < n$. Somit gibt es nach Induktionsvoraussetzung Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_l$ mit

$\rho = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$. Also gilt $\sigma = (k\ n)^{-1} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l = (k\ n) \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$. Somit ist $\sigma$ ebenfalls ein Produkt von Transpositionen. (2) Sei $\sigma := (k\ l)$. Wir nehmen an, dass $k < l$. Wir bestimmen die Anzahl der Elemente in $\{(i, j) \in \{1, \ldots, m\}^2 \mid (i < j) \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}$. Diese Menge ist gleich $\{(k, k+1), (k, k+2), \ldots, (k, l), (k+1, l), (k+2, l), \ldots, (l-1, l)\}$. Sie hat also $(l-k) + (l-k-1) = 2(l-k) - 1$ viele Elemente. Da diese Zahl ungerade ist, gilt wegen Satz 12.4 (1), dass die Signatur von $(k\ l)$ gleich $-1$ ist.

Im Fall $l < k$ beobachten wir, dass $(k\ l) = (l\ k)$, und erhalten dann aus dem ersten Fall, dass $\operatorname{sgn}((l\ k)) = -1$. (3) Die Signatur von $\sigma$ ist $(-1)^k = (-1)^l$. (4) Es gilt $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n) = (i_1\ i_n) \circ (i_1\ i_2\ \ldots,\ i_{n-1})$, somit folgt die behauptete Gleichheit aus (2) durch Induktion nach $n$. ■

SATZ 12.7. *Sei $m \geq 2$, und seien $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i < j$. Sei*

$$A_m := \{f \in S_m \mid \operatorname{sgn}(f) = 1\},$$

*und sei $(i\ j) \circ A_m := \{(i\ j) \circ f \mid f \in A_m\}$. Dann gilt $A_m \cap ((i\ j) \circ A_m) = \emptyset$ und $A_m \cup ((i\ j) \circ A_m) = S_m$; außerdem ist $\varphi : A_m \to (i\ j) \circ A_m$, $f \mapsto (i\ j) \circ f$ bijektiv.*

*Beweis:* Alle Elemente in $A_m$ haben Signatur 1, alle Elemente in $(i\ j) \circ A_m$ haben Signatur $-1$, folglich ist ihr Schnitt leer.

Sei nun $f \in S_m$. Wenn $\operatorname{sgn}(f) = 1$, so liegt $f$ in $A_m$. Wenn $\operatorname{sgn}(f) = -1$, so gilt $f = (i\ j) \circ (i\ j) \circ f$, und da $(i\ j) \circ f$ in $A_m$ liegt, gilt $f \in (i\ j) \circ A_m$.

Um die Bijektivität von $\varphi$ zu zeigen, definieren wir $\psi : (i\ j) \circ A_m \to A_m$, $f \mapsto (i\ j) \circ f$. Dann gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{A_m}}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{(\mathrm{i\ j}) \circ \mathrm{A_m}}$, folglich ist $\varphi$ bijektiv. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 12.8.

(1) Der Beweis von Satz 12.6 (1) liefert eine Zerlegung von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ in ein Produkt von Transpositionen. Geben Sie diese Transpositionen an!
(2) Seien $f, g \in S_m$. Sei $F : S_m \to S_m$, $h \mapsto f \circ h \circ g$. Zeigen Sie, dass $F$ bijektiv ist.
(3) Sei $F : S_m \to S_m$, $F(\sigma) := \sigma^{-1}$ für $\sigma \in S_m$. Zeigen Sie, dass $F$ bijektiv ist.

SATZ 12.9. *Sei $K$ ein kommutativer Ring mit 1, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $D : (K^m)^m \to K$ eine Abbildung, die (D1), (D2) und (D3) erfüllt, seien $z_1, \ldots, z_m \in K^m$, und sei $f \in S_m$. Dann gilt*

$$D(z_{f(1)}, \ldots, z_{f(m)}) = \operatorname{sgn}(f)\, D(z_1, \ldots, z_m). \tag{12.2}$$

*Beweis:* Wir zeigen durch Induktion nach $n$, dass die Gleichung (12.2) für alle Permutationen gilt, die Produkt von genau $n$ Transpositionen sind. Klarerweise gilt (12.2) für $f = \mathrm{id}$. Sei nun $f = \tau_n \circ \cdots \circ \tau_1$, wobei alle $\tau_i$ Transpositionen sind, und sei $g := \tau_{n-1} \circ \cdots \circ \tau_1$. Dann gilt wegen Satz 12.1

$$D(z_{\tau_n(g(1))}, \ldots, z_{\tau_n(g(m))}) = -D(z_{g(1)}, \ldots, z_{g(m)}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dieser Ausdruck gleich $-\mathrm{sgn}(g)\, D(z_1, \ldots, z_m)$. Da $f = \tau_n \circ g$, gilt $\mathrm{sgn}(f) = -\mathrm{sgn}(g)$. Also gilt $D(z_{f(1)}, \ldots, z_{f(m)}) = \mathrm{sgn}(f)\, D(z_1, \ldots, z_m)$. Das beschließt den Induktionsbeweis.

Da sich jede Permutation als Produkt von endlich vielen Transpositionen schreiben lässt, gilt (12.2) also für alle $f \in S_m$. ■

## 3. Determinante einer quadratischen Matrix

Eine Funktion $D$ mit den in Sektion 1 geforderten Eigenschaften erhält man mithilfe der *Determinante*.

DEFINITION 12.10. Sei $K$ ein kommutativer Ring mit Eins, $m \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{m \times m}$. Dann definieren wir die *Determinante* von $A$ durch

$$\det(A) := \sum_{f \in S_m} \mathrm{sgn}(f) \prod_{i=1}^{m} A(i, f(i)).$$

SATZ 12.11. *Sei $K$ ein kommutativer Ring mit Eins, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $A$ eine $m \times m$-Matrix über $K$, und sei $\mathbf{D} : K^m \times K^m \times \cdots \times K^m \to K$ gegeben durch*

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{D} : & (K^m)^m & \longrightarrow & K \\ & (z_1, z_2, \ldots, z_m) & \longmapsto & \det\left(\begin{pmatrix} -z_1- \\ -z_2- \\ \vdots \\ -z_m- \end{pmatrix}\right) \end{array}.$$

*Dann erfüllt $\mathbf{D}$ die Eigenschaften (D1), (D2), und (D3).*

*Beweis:* Wir zeigen als erstes (D1). Seien dazu $z_1, \ldots, z_m, y \in K^m$, $\alpha, \beta \in K$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$. Seien $A, B, C$ die $m \times m$-Matrizen, die durch

$$A = \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_{i-1} & — \\ — & \alpha * z_i + \beta * y & — \\ — & z_{i+1} & — \\ & \vdots & \\ — & z_m & — \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_{i-1} & — \\ — & z_i & — \\ — & z_{i+1} & — \\ & \vdots & \\ — & z_m & — \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_{i-1} & — \\ — & y & — \\ — & z_{i+1} & — \\ & \vdots & \\ — & z_m & — \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Nun gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}\quad & (z_1, \ldots, z_{i-1}, \alpha * z_i + \beta * y, z_{i+1}, \ldots, z_m) \\
& = \det(A) \\
& = \textstyle\sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{j=1}^{m} A(j, f(j)) \\
& = \textstyle\sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \Big( \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} A(j, f(j)) \Big) A(i, f(i)) \\
& = \textstyle\sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \Big( \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} A(j, f(j)) \Big) \big( \alpha B(i, f(i)) + \beta C(i, f(i)) \big) \\
& = \textstyle\sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \Big( \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} A(j, f(j)) \Big) \alpha\, B(i, f(i)) \\
& \quad + \textstyle\sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \Big( \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} A(j, f(j)) \Big) \beta\, C(i, f(i)) \\
& = \alpha \textstyle\sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \big( \prod_{j=1}^{m} B(j, f(j)) \big) + \beta \sum_{f \in S_m} \operatorname{sgn}(f) \big( \prod_{j=1}^{m} C(j, f(j)) \big) \\
& = \alpha \det(B) + \beta \det(C) \\
& = \alpha\, \mathbf{D}(z_1, \ldots, z_m) + \beta\, \mathbf{D}(z_1, \ldots, z_{i-1},\ y,\ z_{i+1}, \ldots, z_m).
\end{aligned}
$$

Wir zeigen als nächstes die Eigenschaft (D2). Sei dazu $A$ eine Matrix, deren $i$-te und $j$-Zeile gleich sind. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{k=1}^{m} A(k, f(k)) \\
&= \sum_{f\in A_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{k=1}^{m} A(k, f(k)) + \sum_{f\in A_m} \operatorname{sgn}(f\circ(i\ j)) \prod_{k=1}^{m} A(k, (f\circ(i, j))\ (k)) \\
&= \sum_{f\in A_m} \prod_{k=1}^{m} A(k, f(k)) - \sum_{f\in A_m} \Big( \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}}^{m} A(k, f(k))\Big) \cdot A(i, f(j)) \cdot A(j, f(i)) \\
&= \sum_{f\in A_m} \prod_{k=1}^{m} A(k, f(k)) - \sum_{f\in A_m} \Big( \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}}^{m} A(k, f(k))\Big) \cdot A(j, f(j)) \cdot A(i, f(i)) \\
&= \sum_{f\in A_m} \prod_{k=1}^{m} A(k, f(k)) - \sum_{f\in A_m} \prod_{k=1}^{m} A(k, f(k)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Um (D3) zu zeigen, beobachten wir, dass $\det(E_m) = 1$. ■

SATZ 12.12. *Sei $K$ ein kommutativer Ring mit Eins, sei $m \in \mathbb{N}$, und seien $A$ und $B$ $m \times m$-Matrizen über $K$. Dann gilt* $\det(A) = \det(A^T)$ *und* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

*Beweis.* Zuerst zeigen wir $\det(A) = \det(A^T)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\det(A^T) &= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{m} A^T(i, f(i)) \\
&= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{m} A(f(i), i) \\
&= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f) \prod_{j=1}^{m} A(j, f^{-1}(j)) \\
&= \sum_{f\in S_m} \operatorname{sgn}(f^{-1}) \prod_{j=1}^{m} A(j, f^{-1}(j)) \\
&= \sum_{g\in S_m} \operatorname{sgn}(g) \prod_{j=1}^{m} A(j, g(j)).
\end{aligned}
$$

Nun beweisen wir die zweite Eigenschaft: Seien $b_1, \ldots, b_m$ die Zeilen der Matrix $B$. Dann steht in der ersten Zeile des Produkts $A \cdot B$ der Vektor

$$A(1,1)b_1 + A(1,2)b_2 + \cdots + A(1,n)b_n.$$

Wenn wir alle $m$ Zeilen des Produkts ausrechnen, dann sehen wir

$$\begin{aligned}\det(A \cdot B) = \mathbf{D}\Big( & A(1,1)b_1 + A(1,2)b_2 + \cdots + A(1,n)b_n,\\ & A(2,1)b_1 + A(2,2)b_2 + \cdots + A(2,n)b_n,\\ & \ldots\\ & A(m,1)b_1 + A(m,2)b_2 + \cdots + A(m,n)b_n\Big).\end{aligned}$$

Wir nutzen nun die Multilinearität der Funktion $\mathbf{D}$ und erhalten

$$\det(A \cdot B) = \sum_{f:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,m\}} \Big(\prod_{i=1}^{m} A(i, f(i))\Big) \cdot \mathbf{D}(b_{f(1)}, b_{f(2)}, \ldots, b_{f(m)}).$$

Die Determinante ist 0, wenn zwei Zeilen gleich sind. Daher brauchen wir nur über die bijektiven Funktionen zu summieren und erhalten:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{f\in S_m} \Big(\prod_{i=1}^{m} A(i, f(i))\Big) \cdot \mathbf{D}(b_{f(1)}, b_{f(2)}, \ldots, b_{f(m)}).$$

Wegen Satz 12.9 gilt für eine Bijektion $f$: $\mathbf{D}(b_{f(1)}, b_{f(2)}, \ldots, b_{f(m)}) = \operatorname{sgn}(f)\,\mathbf{D}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Also erhalten wir

$$\det(A \cdot B) = \sum_{f\in S_m} \Big(\prod_{i=1}^{m} A(i, f(i))\Big) \operatorname{sgn}(f)\ \det(B) = \det(B) \cdot \det(A).$$

■

SATZ 12.13. *Sei $K$ ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei $A$ eine $m \times m$-Matrix über $K$. Dann sind äquivalent:*

(1) *Die Zeilen von $A$ sind linear unabhängig.*
(2) $\det(A) \neq 0$.

*Beweis.* (1)⇒(2): Da die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, ist der Zeilenraum von $A$ ganz $K^n$. Somit gibt es eine Matrix $L$ mit $L \cdot A = E_n$. Dann gilt $1 = \det(L)\det(A)$, also $\det(A) \neq 0$. (2)⇒(1): Wir gehen so vor: Wenn $z_i$ in der linearen Hülle von $z_1, \ldots, z_{i-1}$ liegt, so kann man Satz 12.1 (1) verwenden, um eine Matrix mit gleicher Determinante und $i$-ter Zeile $= 0$ zu erzeugen. Wegen der Eigenschaft (D1) ist diese Determinante $= 0$. ■

## 4. Berechnen der Determinante in Körpern

Es ist besonders leicht, die Determinante einer Matrix in Zeilenstaffelform zu berechnen:

SATZ 12.14. *Sei $K$ ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei $A$ eine $m \times m$-Matrix über $K$, sodass für alle $i, j$ mit $i > j$ gilt: $A(i, j) = 0$. Dann gilt*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} A(i, i).$$

*Beweisskizze:* Sei $f \in S_m$, $f \neq \mathrm{id}$. Wenn für alle $i$ die Ungleichung $i \leq f(i)$ gilt, so gilt $f(m) = m, \ldots, f(1) = 1$, also $f = \mathrm{id}$. Es gibt also $i$ mit $i > f(i)$, und somit ist $A(i, f(i)) = 0$. ■

Wir wissen, dass sich jede Matrix durch Zeilenumformungen in Zeilenstaffelnormalform bringen lässt. Dabei ändert sich die Determinante folgendermaßen:

(1) Wenn wir ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen dazu addieren, bleibt die Determinante unverändert.
(2) Wenn wir eine Zeile mit einem Körperelement vervielfachen, dann vervielfacht sich die Determinante um eben dieses Körperelement.
(3) Beim Vertauschen von zwei Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Aus diesen Überlegungen erhält man einen Algorithmus zum Berechnen der Determinante. Wir rechnen einige Beispiele.

```
In[151]:= << RowRed10.m

In[152]:= DeterminantenDemo[B]
```

$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 29 & -16 \\ -3 & -16 & 22 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das −2 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 2. Zeile.

$$= 1 * 1 * \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 25 & -10 \\ -3 & -16 & 22 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das 3 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 3. Zeile.

$$= 1 * 1 * \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 25 & -10 \\ 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das 2 fache
der 2. Zeile zum 5 fachen der 3. Zeile.

$$= 1 * \tfrac{1}{5} * \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}\right]$$

= 225

*Out[152]*= 225

*In[153]*:= **DeterminantenDemo[A]**

$$\mathrm{Det}[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}]$$

Wir addieren das − 3 fache
der 1. Zeile zum 5 fachen der 2. Zeile.

$$= 1 * \frac{1}{5} * det[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}]$$

Wir addieren das − 4 fache
der 1. Zeile zum 5 fachen der 3. Zeile.

$$= \frac{1}{5} * \frac{1}{5} * det[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}]$$

$$= -\frac{1}{25} det[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}]$$

= 10

*Out[153]*= 10

*In[154]*:= **DeterminantenDemo[B2]**

$$\mathrm{Det}[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

Wir addieren das − 3 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 2. Zeile.

$$= 1 * 1 * det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 4 & 3 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

Wir addieren das − 4 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 3. Zeile.

$$= 1 * 1 * det[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

Wir addieren das − 8 fache
der 1. Zeile zum 1 fachen der 4. Zeile.

$$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & -16 & 24 & -31 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das − 1 fache
der 2. Zeile zum 1 fachen der 3. Zeile.

$$= 1 * 1 * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 24 & -31 \end{pmatrix}\right]$$

Wir addieren das − 16 fache
der 2. Zeile zum 5 fachen der 4. Zeile.

$$= 1 * \frac{1}{5} * det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -72 & -43 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\, det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & -72 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

= 0

*Out[154]=* 0

Schließlich berechnen wir noch die Determinante von $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

*In[155]:=* **<< RowRed10.m**

*In[156]:=* **M = {{0, 2, 1}, {0, 0, 1}, {1, 2, 3}}**

*Out[156]=* {{0, 2, 1}, {0, 0, 1}, {1, 2, 3}}

*In[157]:=* **DeterminantenDemo[M]**

$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -1\, det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= 1\, det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

= 2

*Out[157]=* 2

```
In[158]:= Det[M]

Out[158]= 2
```

## 5. Die adjungierte Matrix

DEFINITION 12.15. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A$ eine $n \times n$-Matrix, und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann bezeichnen wir mit $A^{[i,j]}$ die $n \times n$-Matrix, die durch

$$A^{[i,j]}(k,l) := \begin{cases} A(k,l) & \text{wenn } k \neq i \text{ und } l \neq j \\ 0 & \text{wenn } (k = i \text{ und } l \neq j) \text{ oder } (k \neq i \text{ und } l = j) \\ 1 & \text{wenn } k = i \text{ und } l = j \end{cases}$$

für $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ definiert ist. $A^{[i,j]}$ ist also die Matrix, die man aus $A$ durch Ersetzen der $i$-ten Zeile durch den Einheitsvektor $e_j$ und durch Ersetzen der $j$-ten Spalte durch den Einheitsvektor $e_i$ erhält.

Für

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$A^{[3,2]} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{(3,2)} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Für $n \geq 2$ beteichnet man mit $A^{(i,j)}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die man aus $A$ durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte erhält. Es gilt also

$$A^{(i,j)}(k,l) := \begin{cases} A(k,l) & \text{wenn } k < i \text{ und } l < j \\ A(k+1,l) & \text{wenn } k \geq i \text{ und } l < j \\ A(k,l+1) & \text{wenn } k < i \text{ und } l \geq j \\ A(k+1,l+1) & \text{wenn } k \geq i \text{ und } l \geq j \end{cases}$$

für alle $k, l \in \{1, \ldots, n-1\}$.

LEMMA 12.16. *Seien $B$ eine $n \times n$-Matrix, und seien $\sigma, \tau \in S_n$. Sei $C$ eine $n \times n$-Matrix, die durch $C(i,j) := B(\sigma(i), \tau(j))$ definiert ist. Dann gilt* $\det(C) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) \det(B)$.

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{n} C(i, f(i)) \\
&= \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^{n} B(\sigma(i), \tau(f(i))) \\
&= \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(f) \prod_{k=1}^{n} B(k, \tau\circ f\circ\sigma^{-1}(k)) \\
&= \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\tau\circ f\circ\sigma^{-1}) \prod_{k=1}^{n} B(k, \tau\circ f\circ\sigma^{-1}(k)) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod_{k=1}^{n} B(k, g(k)) \\
&= \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\ \det(B).
\end{aligned}$$

LEMMA 12.17. *Sei $n \geq 2$, sei $A$ eine $n\times n$-Matrix, und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt* $\det(A^{[i,j]}) = (-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)})$.

*Beweis:* Wir beweisen den Satz zunächst für $i = j = n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\det(A^{[n,n]}) &= \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(f) \prod_{k=1}^{n} A^{[n,n]}(k, f(k)) \\
&= \sum_{\substack{f\in S_n\\ f(n)=n}} \operatorname{sgn}(f) \prod_{k=1}^{n-1} A(k, f(k)).
\end{aligned}$$

Sei $f$ eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ mit $f(n) = n$. Dann ist $g := f|_{\{1,\ldots,n-1\}}$ eine Permutation von $\{1, \ldots, n-1\}$. Da sich $f$ als Produkt gleich vieler Transpositionen wie $g$ schreiben lässt, ist die Signatur von $g$ gleich der Signatur von $f$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{f\in S_n\\ f(n)=n}} \operatorname{sgn}(f) \prod_{k=1}^{n-1} A(k, f(k)) \\
&= \sum_{g\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(g) \prod_{k=1}^{n-1} A(k, f(k)) \\
&= \det(A^{(i,j)}).
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun den Fall $(i, j) \neq (n, n)$. Sei $\sigma$ der Zyklus $(i \;\; i+1 \;\; \ldots \;\; n)$, und $\tau := (j \;\; j+1 \;\; \ldots \;\; n)$

$$B(k, l) := A(\sigma(k), \tau(l).)$$

Dann gilt $B^{(n,n)} = A^{(i,j)}$. Außderdem gilt für alle $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ auch $B^{[n,n]}(k, l) = A^{[i,j]}(\sigma(k), \tau(l))$. Wir berechnen nun $\det(A^{[i,j]})$. Nach Lemma 12.16 gilt $\det(A^{[i,j]}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\det(B^{[n,n]})$. Nach dem bereits betrachteten Fall gilt $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\det(B^{[n,n]}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\det(B^{(n,n)})$. Wegen $B^{(n,n)} = A^{(i,j)}$ gilt nun insgesamt

$$\det(A^{[i,j]}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\det(A^{(i,j)}).$$

Nach Satz 12.6 (4) gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-i+1+1} = (-1)^{n-i}$ und $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{n-j}$. Also gilt $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{i+j}$. ■

DEFINITION 12.18. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. Die zu $A$ adjungierte (oder adjunkte[1] ) Matrix $A^{\text{ad}}$ ist wie folgt definiert: wenn $n \geq 2$, so gilt

$$A^{\text{ad}}(i, j) := (-1)^{i+j}\det(A^{(j,i)}).$$

Für $n = 1$ definiert man die adjungierte Matrix durch $A^{\text{ad}} := (1)$.

Es gilt also $A^{\text{ad}}(i, j) = \det(A^{[j,i]})$. Wir beobachten zunächst folgenden einfachen Satz:

SATZ 12.19. *Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt* $(A^{\text{ad}})^T = (A^T)^{\text{ad}}$.

*Beweis:* Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $(A^{\text{ad}})^T(i, j) = A^{\text{ad}}(j, i) = \det(A^{[i,j]}) = \det((A^{[i,j]})^T) = \det((A^T)^{[j,i]}) = (A^T)^{\text{ad}}(i, j)$. ■

SATZ 12.20. *Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins, und sei $A$ eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen aus $R$. Dann gilt*

$$A \cdot A^{\text{ad}} = A^{\text{ad}} \cdot A = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \det(A) \end{pmatrix}.$$

*Beweis:* Wir werden als Abkürzung für die $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & r \end{pmatrix}$$

mit $r \in R$ auch oft kürzer $r * E_n$ schreiben.

---

[1]Der Begriff *adjunkte Matrix* hat folgenden Vorteil: es gibt in der linearen Algebra auch den Begriff des *adjungierten Operators*, der aber nicht mit $A^{\text{ad}}$ zu tun hat, sondern mit $A^T$. Der Begriff der zu $A$ *adjunkten Matrix* vermeidet diese Inkongruenz.

Wir nehmen an, dass $n \geq 2$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$e_j := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

der $j$-te Einheitsvektor in $R^n$; der Einser steht dabei an der $j$-ten Stelle. Wir zeigen zunächst $A \cdot A^{\mathrm{ad}} = \det(A) * E_n$.

Sei nun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir bilden nun Matrizen $A_1, \ldots, A_n$ wie folgt: $A_1$ ist die Matrix, die wir aus $A$ erhalten, wenn wir die $i$-te Zeile durch $e_1$ ersetzen; allgemein sei $A_j$ die Matrix, die wir erhalten, wenn wir die $i$-te Zeile durch $e_j$ ersetzen. Es gilt also

$$A_j = \begin{pmatrix} A(1,1) & \ldots & A(1,j-1) & A(1,j) & A(1,j+1) & \ldots & A(1,n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(i-1,1) & \ldots & A(i-1,j-1) & A(i-1,j) & A(i-1,j+1) & \ldots & A(i-1,n) \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A(i+1,1) & \ldots & A(i+1,j-1) & A(i+1,j) & A(i+1,j+1) & \ldots & A(i+1,n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(n,1) & \ldots & A(n,j-1) & A(n,j) & A(n,j+1) & \ldots & A(n,n) \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 12.1 (1) und Satz 12.11 erhalten wir, dass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\det(A_j) = \det(A^{[i,j]}).$$

Sei nun $k \in \{1, \ldots, n\}$ Wir berechnen nun den $(k, i)$-ten Eintrag von $A \cdot A^{\mathrm{ad}}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} A \cdot A^{\mathrm{ad}}(k,i) &= \sum_{j=1}^{n} A(k,j) A^{\mathrm{ad}}(j,i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A(k,j) \det(A^{[i,j]}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A(k,j) \det(A_j) \end{aligned}$$

Wir nützen nun die Linearität der Determinante in der $i$-ten Zeile aus und erhalten, dass die letzte Summe gleich der Determinante der Matrix $B$ ist, die wir aus $A$ erhalten, indem wir die $i$-te Zeile von $A$ durch

$$(A(k,1), A(k,2), \ldots, A(k,n)),$$

also durch die $k$-te Zeile von $A$ ersetzen. Es gilt also

$$B = \begin{pmatrix} A(1,1) & \ldots & A(1,j-1) & A(1,j) & A(1,j+1) & \ldots & A(1,n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(i-1,1) & \ldots & A(i-1,j-1) & A(i-1,j) & A(i-1,j+1) & \ldots & A(i-1,n) \\ A(k,1) & \ldots & A(k,j-1) & A(k,j) & A(k,j+1) & \ldots & A(k,n) \\ A(i+1,1) & \ldots & A(i+1,j-1) & A(i+1,j) & A(i+1,j+1) & \ldots & A(i+1,n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(n,1) & \ldots & A(n,j-1) & A(n,j) & A(n,j+1) & \ldots & A(n,n) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix $B$ ist wegen Satz 12.11 gleich 0, wenn $k \neq i$, da dann in $B$ die $k$-te und die $i$-te Zeile gleich sind. Ist $k = i$, so gilt $\det(B) = \det(A)$.

Insgesamt haben wir also bewiesen, dass für jede $n \times n$-Matrix $A$ die Gleichheit $A \cdot A^{\mathrm{ad}} = \det(A) * E_n$ gilt. Dann gilt auch $A^{\mathrm{ad}} \cdot A = (A^T \cdot (A^{\mathrm{ad}})^T)^T = (A^T \cdot (A^T)^{\mathrm{ad}})^T = (\det(A^T) * E_n)^T = \det(A) * E_n$. ■

KOROLLAR 12.21 (Entwicklungssatz von Laplace). *Sei $n \geq 2$, sei $A$ eine $n \times n$-Matrix über einem kommutativen Ring mit Eins $K$, und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt*

(1) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A(i,k) \cdot \det(A^{(i,k)})$. *(Entwicklung nach der $i$-ten Zeile.)*
(2) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} A(k,j) \cdot \det(A^{(k,j)})$. *(Entwicklung nach der $j$-ten Spalte.)*

*Beweis:* (1) Nach Satz 12.20 gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= (A \cdot A^{\mathrm{ad}})\ (i,i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k) A^{\mathrm{ad}}(k,i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)(-1)^{i+k} \det(A^{(i,k)}). \end{aligned}$$

(2) Nach Satz 12.20 gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= (A^{\mathrm{ad}} \cdot A)\ (j,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A^{\mathrm{ad}}(j,k) A(k,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \det(A^{(k,j)}) A(k,j). \end{aligned}$$

## 6. Determinanten und Invertierbarkeit

SATZ 12.22. *Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins, und sei $A$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus $R$. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es gibt eine Matrix $B$ mit $A \cdot B = E_n$.*
(2) *Es gibt eine Matrix $C$ mit $C \cdot A = E_n$.*
(3) *Es gibt ein $y \in R$, sodass* $\det(A)\ y = 1$.

*Beweis:* (1)⇒(3): wegen Satz 12.12 gilt $1 = \det(E_n) = \det(A)\ \det(B)$, also leistet $y := \det(B)$ das Gewünschte. (3)⇒(1): Sei $B := y * A^{\mathrm{ad}}$. Dann gilt $A \cdot B = y * (A \cdot A^{\mathrm{ad}})$, und das ist wegen Satz 12.20 gleich

$$y * \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \det(A) \end{pmatrix},$$

also gleich $E_n$.

Die Äquivalenz von (1) und (2) zeigt man genauso. ■

Somit wissen wir, dss eine ganzzahlige Matrix genau dann eine ganzzahlige inverse Matrix hat, wenn ihre Determinante $+1$ oder $-1$ ist.

SATZ 12.23. *Sei $K$ ein Körper, und sei $A$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus $K$. Dann sind äquivalent:*

(1) $\det(A) \neq 0$.
(2) *$A$ ist invertierbar.*
(3) *Die Zeilenvektoren von $A$ sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spaltenvektoren von $A$ sind linear unabhängig.*

*Beweis:* (1)⇒(2): $B := \frac{1}{\det(A)} A^{\mathrm{ad}}$ ist nach Satz 12.20 zu $A$ invers. (2)⇒(3): Sei $(y_1, \dots, y_n) \in K^n$ mit $(y_1, \dots, y_n) \cdot A = 0$. Dann gilt $0 = 0 \cdot A^{-1} = ((y_1, \dots, y_n) \cdot A) \cdot A^{-1} = (y_1, \dots, y_n)$, also sind die Zeilen linear unabhängig. (3)⇒(1): Da die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, ist der Zeilenraum von $A$ ganz $K^n$. Somit gibt es eine Matrix $L$ mit $L \cdot A = E_n$. Dann gilt $1 = \det(L) \det(A)$, also $\det(A) \neq 0$.

Die Bedingungen (1), (2) und (3) sind also für jede Matrix $A$ äquivalent.

(1)⇒(4): Sei $A$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Dann gilt $\det(A^T) \neq 0$, also sind die Zeilen von $A^T$ nach einer der bereits bewiesenen Implikationen linear unabhängig. Somit gilt (4). (4)⇒(3): Wenn die Spalten von $A$ linear unabhängig sind, so sind es auch die Zeilen von $A^T$. Also gilt $\det(A^T) \neq 0$, und somit $\det(A) \neq 0$. ■

## 7. Determinanten und Volumina

Wir betrachten in dieser Sektion Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$. Wir wissen (wegen $\det(A) = \det(A^T)$), dass $|\det(A)|$ das Volumen des von den Spalten von $A$ aufgespannten Parallelepipeds ist.

SATZ 12.24. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und seien $b_1, \dots, b_n$ die Spaltenvektoren von $B$. Sei $h_A : \mathbb{R}^n \to R^n$ gegeben durch $h_A(y) = A \cdot y$ für $y \in R^n$. Das Volumen des von $h_A(b_1), \dots, h_A(b_n)$ aufgespannten Parallelepipeds ist $|\det(A) \det(B)|$.*

*Beweis:* Das Parallelepiped wird von den Spaltenvektoren von $A \cdot B$ aufgespannt und hat also das Volumen $|\det(A \cdot B)|$. Aus der Multiplikativität der Determinante folgt die Aussage.

SATZ 12.25. *Seien $m, n \in \mathbb{R}$ mit $m \geq n$, seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und seien $b_1, \ldots, b_n$ die Spaltenvektoren von $B$. Sei $h_A : \mathbb{R}^n \to R^m$ gegeben durch $h_A(y) = A \cdot y$ für $y \in R^n$. Das $n$-dimensionale Volumen des von $h_A(b_1), \ldots, h_A(b_n)$ aufgespannten Parallelepipeds ist* $\sqrt{\det(A^T \cdot A)} \cdot |\det(B)|$.

*Beweis:* Sei $Q$ eine $m \times n$-Matrix, in deren Spalten eine Orthonormalbasis des Spaltenraums von $A$ steht. Es gilt dann $Q^T \cdot Q = E_n$. Dann stehen in den Spalten von $Q^T \cdot (A \cdot B)$ die Koordinaten des von $h_A(b_1), \ldots, h_A(b_n)$ aufgespannten Parallelepipeds bezüglich dieser Orthonormalbasis. Sei nun $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = QR$. Dann gilt für das gesuchte Volumen $V$:

$$\begin{aligned} V^2 &= \det(Q^T AB)^2 \\ &= \det(B^T A^T Q Q^T AB) \\ &= \det(B^T R^T Q^T Q Q^T Q R B) \\ &= \det(B^T) \det(B) \det(R^T Q^T Q R) \\ &= \det(B)^2 \det(A^T \cdot A). \end{aligned}$$

■

Für $B := E_n$ erhalten wir als Folgerung, dass das $n$-dimensionale Volumen des von den Spalten von $A$ aufgespannten Parallelepipeds gleich $\sqrt{\det(A^T \cdot A)}$ ist.

ÜBUNGSAUFGABEN 12.26.

(1) Sei $r > s$. Zeigen Sie, dass für jede $r \times s$-Matrix $A$ gilt, dass $\det(A^T \cdot A) \geq 0$. *Hinweis:* Schreiben Sie $A$ als $Q \cdot R$, wobei in den Spalten von $Q$ eine Orthonormalbasis für den Spaltenraum von $A$ steht, und berechnen Sie $\det(Q^T \cdot A)^2$.

## 8. Gleichungssysteme

SATZ 12.27. *Sei $K$ ein kommutativer Ring mit Eins, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n\times n}$ und sei $b \in K^n$. Wir nehmen an, dass $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ eine Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist.*

*Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, und sei $A_i^b$ die Matrix, die man aus $A$ erhält, indem man die $i$-te Spalte von $A$ durch $b$ ersetzt. Dann gilt* $\det(A)\, y_i = \det(A_i^b)$.

*Beweis:* Sei $X$ die Matrix, die man aus der Einheitsmatrix $E_n$ erhält, indem man die $i$-te Spalte durch $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ersetzt. Dann gilt

$$A \cdot X = A_i^b.$$

Also gilt $\det(A)\ \det(X) = \det(A_i^b)$. Durch Entwicklung nach der $i$-ten Zeile erhält man $\det(X) = y_i$. ■

SATZ 12.28. *Sei $K$ ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, $b \in \mathbb{N}$. Äquivalent sind:*

(1) *Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hat genau eine Lösung in $K^n$.*
(2) $\det(A) \neq 0$.

*Beweis:* Wenn $\det(A) \neq 0$, so ist $A$ nach Satz 12.23 invertierbar, und somit ist $x := A^{-1} \cdot b$ die eindeutige Lösung von $A \cdot x = b$.

Wenn $\det(A) = 0$, so sind die Spaltenvektoren von $A$ linear abhängig; der Nullraum von $A$ ist also nicht nulldimensional. Die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ ist also leer oder von der Form $x_0 + N(A)$, und somit in beiden Fällen nicht einelementig. ■

SATZ 12.29 (Cramersche Regel). *Sei $K$ ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, $b \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass* $\det(A) \neq 0$. *Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $A_i^b$ die Matrix, die man aus $A$ dadurch erhält, dass man die $i$-te Spalte durch $b$ ersetzt, und sei $y_i := \frac{\det(A_i^b)}{\det(A)}$.*
*Dann ist $(y_1, \ldots, y_n)$ die eindeutige Lösung von $A \cdot x = b$.*

*Beweis:* Wegen Satz 12.28 hat $A \cdot x = b$ genau eine Lösung, und wegen Satz 12.29 berechnet sich diese Lösung durch $y_i := \frac{\det(A_i^b)}{\det(A)}$. ■

# Literaturverzeichnis

[Halmos, 1976] Halmos, P. R. (1976). *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. Vierte Auflage, Aus dem Englischen übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 6.

ANHANG A

# Programme, die vorrechnen

Die Mathematica-Files `GaussDemo6.m` und `RowRed9.m` enthalten Mathematica-Funktionen, die folgende Probleme mit Zwischenschritten vorrechnen:

- Lösen eines linearen Gleichungssystems (`Gauss[A,b]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonForm[A]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonNormalForm[A]`).
- Bestimmen der Determinante einer Matrix (`DeterminantenDemo[A]`).

Die Programme können von Mathematica aus mit `<< GaussDemo6.m` und `<< RowRed9.m` geladen werden.
Sie sind auf `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/MathInf/vlws05/MathematicaProgramme/` erhältlich und werden den Studierenden ausschließlich für die Nutzung im Rahmen des Kurses “Lineare Algebra” zur Verfügung gestellt.