

Euklidische Vektorräume

1. Orthogonale Matrizen

DEFINITION 18.1. Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix A ist *orthogonal* : $\Leftrightarrow A^T \cdot A = E_n$.

LEMMA 18.2. Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist orthogonal.
- (2) Die Spalten von A sind eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .
- (3) Die Zeilen von A sind eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .

DEFINITION 18.3. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Funktion φ ist eine *Isometrie*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$.

SATZ 18.4. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann eine Isometrie, wenn $S_\varphi(E, E)$ eine orthogonale Matrix ist.

Wir werden im folgenden das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ von zwei Vektoren im \mathbb{R}^n auch als $x^T \cdot y$ schreiben.

Beweis von Satz 18.4: Sei $A := S_\varphi(E, E)$. Seien nun φ eine Isometrie, und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\|A \cdot (x + y) - A \cdot 0\| = \|(x + y) - 0\|$, da φ eine Isometrie ist. Also gilt $\langle A \cdot x + A \cdot y, A \cdot x + A \cdot y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle$, und somit

$$\langle A \cdot x, A \cdot x \rangle + 2\langle A \cdot x, A \cdot y \rangle + \langle A \cdot y, A \cdot y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Da φ eine Isometrie ist und $\varphi(0) = 0$, gilt $\|A \cdot x\| = \|x\|$ und $\|A \cdot y\| = \|y\|$. Somit gilt

$$\langle A \cdot x, A \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Also gilt $x^T \cdot A^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot y$. Wenn wir nun $x := e_i$, $y := e_j$ setzen, so erhalten wir $(e_i \cdot A^T) \cdot (A \cdot e_j) = \delta(i, j)$. Somit steht in den Spalten von A eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n , und A ist daher orthogonal.

Sei nun umgekehrt A eine orthogonale Matrix. Dann gilt $\|A \cdot x - A \cdot y\|^2 = \|A \cdot (x - y)\|^2 = (x - y)^T \cdot A^T \cdot A \cdot (x - y) = (x - y)^T \cdot E_n \cdot (x - y) = (x - y)^T \cdot (x - y) = \|x - y\|^2$. ■

2. Euklidische Räume

Wir werden nun auch Skalarprodukte auf anderen Räumen als \mathbb{R}^n brauchen:

DEFINITION 18.5. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} , und sei $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Abbildung ist genau dann ein *Skalarprodukt auf V* , wenn für alle $x, x', y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $\langle x + x' | y \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x' | y \rangle$,
- (2) $\langle \alpha * x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$,
- (3) $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$,
- (4) wenn $x \neq 0$, so gilt $\langle x | x \rangle > 0$.

Ein *Euklidischer Raum* ist ein Paar $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ aus einem Vektorraum V über \mathbb{R} und einem Skalarprodukt auf V .

Mit $\langle x, y \rangle$ bezeichnen wir, wie bisher, nur das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , das durch $\langle x, y \rangle := x^T \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ definiert ist.

Für jedes Element x eines Euklidischen Raums definieren wir $\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Eine *Orthonormalbasis* eines Euklidischen Raums ist eine Basis B , sodass $\langle b | b \rangle = 1$ für alle $b \in B$, und $\langle b | c \rangle = 0$ für $b, c \in B$ mit $b \neq c$.

SATZ 18.6. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis.

Beweisskizze: Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren.

LEMMA 18.7. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum, und sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Dann gilt für alle $x, y \in V$: $\langle x | y \rangle = \langle (x)_B, (y)_B \rangle$.

Beweis: Sei $n := \dim(V)$. Es gilt $\langle x | y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n (x)_B[i] * b_i | \sum_{j=1}^n (y)_B[j] * b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x)_B[i] (y)_B[j] \langle b_i | b_j \rangle = \sum_{i=1}^n (x)_B[i] (y)_B[i] = \langle (x)_B, (y)_B \rangle$. ■

3. Selbstadjungierte Operatoren

DEFINITION 18.8. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum, und sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Die Abbildung φ heißt *selbstadjungiert*, wenn für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle \varphi(x) | y \rangle = \langle y | \varphi(x) \rangle$.

SATZ 18.9. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum, sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, und sei B eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Dann sind äquivalent:

- (1) φ ist selbstadjungiert.
- (2) $A := S_\varphi(B, B)$ ist symmetrisch (das heißt, es gilt $A^T = A$).

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle \varphi(x) | y \rangle = \langle x | \varphi(y) \rangle$, also $\langle (\varphi(x))_B, (y)_B \rangle = \langle (x)_B, (\varphi(y))_B \rangle$, und somit $\langle A \cdot (x)_B, (y)_B \rangle = \langle (x)_B, A \cdot (y)_B \rangle$. Für $x := b_i$ und $y := b_j$ gilt

also $\langle A \cdot e_i, e_j \rangle = \langle e_i, A \cdot e_j \rangle$, und somit $e_i^T \cdot A^T \cdot e_j = e_i^T \cdot A \cdot e_j$, also $A^T(i, j) = A(i, j)$. Die Matrix A ist also symmetrisch.

(2) \Rightarrow (1): $\langle \varphi(x) | y \rangle = \langle (\varphi(x))_B, (y)_B \rangle = (A \cdot (x)_B)^T \cdot (y)_B = (x)_B^T \cdot A^T \cdot (y)_B = (x)_B^T \cdot A \cdot (y)_B = \langle (x)_B, A \cdot (y)_B \rangle = \langle (x)_B, (\varphi(y))_B \rangle = \langle x | \varphi(y) \rangle$. ■

LEMMA 18.10. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A = A^T$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , das heißt, sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $A \cdot x = \lambda * x$ gibt. Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem gibt es $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$ und $A \cdot y = \lambda * y$

Beweis: Für $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ und $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit $\bar{z} := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ den Vektor mit den konjugiert komplexen Einträgen, und mit $y^T \cdot \bar{z}$ die Zahl $\sum_{i=1}^n y_i \bar{z}_i$. Da $x \neq 0$, gilt $x^T \cdot \bar{x} \in \mathbb{R}$ und $x^T \cdot \bar{x} > 0$. Wegen $A = A^T$ gilt $\lambda(x^T \cdot \bar{x}) = (\lambda * x)^T \cdot \bar{x} = (A \cdot x)^T \cdot \bar{x} = (x^T \cdot A^T) \cdot \bar{x} = x^T \cdot (A^T \cdot \bar{x}) = x^T \cdot (A \cdot \bar{x}) = x^T \cdot (\overline{\lambda * x}) = x^T \cdot (\bar{\lambda} * \bar{x}) = \bar{\lambda}(x^T \cdot \bar{x})$. Somit gilt $\lambda = \bar{\lambda}$, und damit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Matrix $A - \lambda * E$ ist also in $\mathbb{C}^{n \times n}$ nicht invertierbar, da ihre Spalten linear abhängige Vektoren in \mathbb{C}^n sind. Damit ist die Matrix $A - \lambda * E$ auch in $\mathbb{R}^{n \times n}$ nicht invertierbar, und somit gibt es $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$ und $A \cdot y = \lambda * y$. ■

DEFINITION 18.11. Sei V ein Vektorraum über K , und $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ein $\lambda \in K$ ist ein *Eigenwert* von φ , wenn es ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ gibt, sodass $\varphi(v) = \lambda * v$. Ein $v \in V$ ist ein *Eigenvektor* von φ , wenn es $\lambda \in K$ gibt, sodass $\varphi(v) = \lambda * v$.

LEMMA 18.12. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum mit $\dim(V) > 0$, und sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann besitzt φ einen Eigenvektor in V .

Beweis: Sei C eine Orthonormalbasis von V , $n := \dim(V)$, und sei $A := S_\varphi(C, C)$. Die Matrix A liegt in $\mathbb{R}^{n \times n}$ und ist wegen Satz 18.9 symmetrisch. Da in \mathbb{C} das charakteristische Polynom c_A zumindest eine Nullstelle hat, gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, sodass $A \cdot x = \lambda * x$. Wegen Lemma 18.10 gilt $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gibt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$, sodass $A \cdot y = \lambda * y$. Sei nun $v \in V$ so, dass $(v)_C = y$. Dann ist v ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ . ■

SATZ 18.13 (Hauptachsentransformation für selbstadjungierte Operatoren). Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum mit $\dim(V) > 0$, und sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, die nur aus Eigenvektoren von φ besteht.

Beweis: Wir beweisen den Satz mit Induktion nach der Dimension von V . Wenn $\dim(V) = 1$, so wählen wir $v \in V$ mit $v \neq 0$. Wir setzen $b := \frac{1}{\|v\|} * v$, und $B := (b)$. Dann ist B eine Orthonormalbasis. Wegen $\dim(V) = 1$ ist b ein Eigenvektor von V .

Sei nun $n := \dim(V) \geq 2$. Wegen Lemma 18.12 besitzt φ einen Eigenvektor v . Wir bilden nun $b_1 := \frac{1}{\|v\|} * v$. Wir setzen $U_1 := L(b_1)$ und

$$U_2 := \{b_1\}^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w | b_1 \rangle = 0\}.$$

Wegen $b_1 \neq 0$ gilt $\dim(U_1) = 1$. Für die Abbildung $h \in V^*$, $h(w) := \langle w | b_1 \rangle$ gilt $h(b_1) \neq 0$. Also gilt $\dim(\text{im}(h)) = 1$, und somit wegen des Homomorphiesatzes $\dim(U_2) = \dim(\ker(h)) = n - 1$. Wir zeigen nun, dass U_2 φ -invariant ist. Sei dazu $w \in U_2$. Wir zeigen, dass auch $\varphi(w)$ in U_2 liegt. Es gilt $\langle \varphi(w) | b_1 \rangle = \langle w | \varphi(b_1) \rangle = \langle w | \lambda * b_1 \rangle = \lambda \langle w | b_1 \rangle = 0$. Also ist U_2 φ -invariant.

Wir zeigen nun $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Sei $w \in U_1 \cap U_2$. Wegen $w \in U_1$ gibt es $\mu \in \mathbb{R}$, sodass $w = \mu * b_1$. Dann gilt $0 = \langle w | b_1 \rangle = \langle \mu * b_1 | b_1 \rangle = \mu \langle b_1 | b_1 \rangle = \mu$, also $w = 0$. Also ist die Summe $U = U_1 \dot{+} U_2$ direkt. Da $\dim(U) = \dim(U_1) + \dim(U_2) = 1 + (n - 1)$, gilt $U = V$. Der Vektorraum V ist also die direkte Summe von U_1 und U_2 .

Nun ist $(U_2, \langle \cdot | \cdot \rangle|_{U_2 \times U_2})$ ein Euklidischer Raum. Der Endomorphismus $\varphi_2 := \varphi|_{U_2}$ ist selbstadjungiert. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt also $(U_2, \langle \cdot | \cdot \rangle|_{U_2 \times U_2})$ eine Orthonormalbasis B_2 , die aus lauter Eigenvektoren von φ_2 , und damit von φ , besteht.

Insgesamt bildet $\{b_1\} \cup B_2$ also eine Orthonormalbasis von V , die nur aus Eigenvektoren von φ besteht. ■

KOROLLAR 18.14. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A = A^T$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $Q^T \cdot A \cdot Q$ eine Diagonalmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Beweis: Sei $\varphi := h_A$. Sei B eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , die aus Eigenvektoren von h_A besteht. Wir schreiben diese Vektoren in die Spalten von Q . Sei $D := S_{h_A}(B, B)$. Es gilt dann $D = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$. Da Q eine orthogonale Matrix ist, gilt $Q^{-1} = Q^T$. ■

BEISPIEL 18.15. Wir zeigen in folgendem Beispiel, wie man diese Diagonalmatrix tatsächlich finden kann.

Wir berechnen im folgenden Beispiel eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der Matrix A .

$$A = \left\{ \left\{ \frac{326}{125}, \frac{672}{625}, -\frac{504}{625} \right\}, \left\{ \frac{672}{625}, -\frac{3216}{3125}, \frac{2412}{3125} \right\}, \left\{ -\frac{504}{625}, \frac{2412}{3125}, -\frac{1809}{3125} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \frac{326}{125}, \frac{672}{625}, -\frac{504}{625} \right\}, \left\{ \frac{672}{625}, -\frac{3216}{3125}, \frac{2412}{3125} \right\}, \left\{ -\frac{504}{625}, \frac{2412}{3125}, -\frac{1809}{3125} \right\} \right\}$$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} \frac{326}{125} & \frac{672}{625} & -\frac{504}{625} \\ \frac{672}{625} & -\frac{3216}{3125} & \frac{2412}{3125} \\ -\frac{504}{625} & \frac{2412}{3125} & -\frac{1809}{3125} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen als erstes einen Eigenwert und einen Eigenvektor von A .

cA = CharacteristicPolynomial[A, t]

$$6t + t^2 - t^3$$

Wir berechnen die Eigenvektoren zum Eigenwert 0.

$$\mathbf{U1} = \text{NullSpace}[A - 0 * \text{IdentityMatrix}[3]]$$

$$\left\{ \left\{ 0, \frac{3}{4}, 1 \right\} \right\}$$

Wir wählen einen Vektor daraus als Vektor $\mathbf{b1}$

$$\mathbf{b1} = \mathbf{U1}[[1]]$$

$$\left\{ 0, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

Der Orthogonalraum von $\mathbf{b1}$ ist $\mathbf{U2}$. Wir wissen, dass auch dieser Raum wieder h_A -invariant ist.

$$\mathbf{U2} = \text{NullSpace}[\{\mathbf{b1}\}]$$

$$\left\{ \left\{ 0, -\frac{4}{3}, 1 \right\}, \{1, 0, 0\} \right\}$$

Wir berechnen nun irgendeine Basis von $\mathbf{U2}$ mit dem Ziel, einen Eigenvektor von A zu erhalten, der in $\mathbf{U2}$ liegt

$$\mathbf{C2} = \text{Transpose}[\mathbf{U2}]$$

$$\left\{ \{0, 1\}, \left\{ -\frac{4}{3}, 0 \right\}, \{1, 0\} \right\}$$

Wir berechnen nun die Darstellungsmatrix von h_A bezüglich der Basis $\mathbf{C2}$

$$\text{col1} = \text{LinearSolve}[\mathbf{C2}, A.\mathbf{U2}[[1]]]$$

$$\left\{ -\frac{201}{125}, -\frac{56}{25} \right\}$$

$$\text{col2} = \text{LinearSolve}[\mathbf{C2}, A.\mathbf{U2}[[2]]]$$

$$\left\{ -\frac{504}{625}, \frac{326}{125} \right\}$$

$$\text{ShC2C2} = \text{Transpose}[\{\text{col1}, \text{col2}\}]$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{201}{125}, -\frac{504}{625} \right\}, \left\{ -\frac{56}{25}, \frac{326}{125} \right\} \right\}$$

$$\text{MatrixForm}[\text{ShC2C2}]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{201}{125} & -\frac{504}{625} \\ -\frac{56}{25} & \frac{326}{125} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun einen Eigenvektor von $S_h(\mathbf{C2}, \mathbf{C2})$

$$\mathbf{c} = \text{CharacteristicPolynomial}[\text{ShC2C2}, t]$$

$$-6 - t + t^2$$

$$\text{Factor}[\mathbf{c}]$$

$$(-3 + t)(2 + t)$$

$$\mathbf{U21bzglC2} = \text{NullSpace}[\text{ShC2C2} + 2 * \text{IdentityMatrix}[2]]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{72}{35}, 1 \right\} \right\}$$

Aus diesem Eigenvektor von $S_h(C2, C2)$ erhalten wir einen Eigenvektor von A , der in $U2$ liegt

$$\mathbf{b2} = \mathbf{C2.U21bzglC2}[[1]]$$

$$\left\{ 1, -\frac{96}{35}, \frac{72}{35} \right\}$$

Nun betrachten wir den h_A -invarianten Unterraum $U3$ von $U2$ aller der Vektoren, die in $U2$ liegen und normal auf $b2$ stehen. Das ist genau das orthogonale Komplement von $\{b1, b2\}$

$$\mathbf{U3} = \mathbf{NullSpace}[\{\mathbf{b1}, \mathbf{b2}\}]$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{40}{7}, -\frac{4}{3}, 1 \right\} \right\}$$

$$\mathbf{b3} = \mathbf{U3}[[1]]$$

$$\left\{ -\frac{40}{7}, -\frac{4}{3}, 1 \right\}$$

Wir berechnen nun noch eine Basis $C3$ von $U3$.

$$\mathbf{C3} = \mathbf{Transpose}[\mathbf{U3}]$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{40}{7} \right\}, \left\{ -\frac{4}{3} \right\}, \{1\} \right\}$$

$$\mathbf{ShC3C3} = \mathbf{LinearSolve}[\mathbf{C3}, \mathbf{A.U3}[[1]]]$$

$$\{3\}$$

Die Vektoren $b1, b2, b3$ normieren wir nun; so erhalten wir die gewünschte Orthonormalbasis. Diese Basis schreiben wir in die Spalten von Q .

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Transpose}[\left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b1} \cdot \mathbf{b1}}} * \mathbf{b1}, \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b2} \cdot \mathbf{b2}}} * \mathbf{b2}, \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b3} \cdot \mathbf{b3}}} * \mathbf{b3} \right\}]$$

$$\left\{ \left\{ 0, \frac{7}{25}, -\frac{24}{25} \right\}, \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{96}{125}, -\frac{28}{125} \right\}, \left\{ \frac{4}{5}, \frac{72}{125}, \frac{21}{125} \right\} \right\}$$

$$\mathbf{DD} = \mathbf{Transpose}[\mathbf{Q}].\mathbf{A}.\mathbf{Q}$$

$$\{\{0, 0, 0\}, \{0, -2, 0\}, \{0, 0, 3\}\}$$

SATZ 18.16. Sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei φ ein selbstadjungierter Operator. Dann sind Eigenvektoren von φ , die zu verschiedenen Eigenwerten von A gehören, aufeinander orthogonal.

Beweis: Sei $\varphi(v_1) = \lambda_1 * v_1$, $\varphi(v_2) = \lambda_2 * v_2$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt $\lambda_1 \langle v_1 | v_2 \rangle = \langle \lambda_1 * v_1 | v_2 \rangle = \langle \varphi(v_1) | v_2 \rangle = \langle v_1 | \varphi(v_2) \rangle = \langle v_1 | \lambda_2 * v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1 | v_2 \rangle$. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$. ■

4. Positiv definite Matrizen

DEFINITION 18.17. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix A ist *positiv definit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt $x^T \cdot A \cdot x > 0$.

Positiv definite Matrizen sind regulär: wenn nämlich die Spalten linear abhängig sind, so gibt es $x \neq 0$ mit $A \cdot x = 0$ und somit $x^T \cdot A \cdot x = 0$. Wegen Lemma 18.10 sind alle komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer symmetrischen Matrix reell. Aus ihren Vorzeichen kann man auch die positive Definitheit einer symmetrischen Matrix A ablesen.

SATZ 18.18. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = A$. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist positiv definit.
- (2) Alle Eigenwerte von A sind positiv.
- (3) Es existiert $C \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass $C^T = C$ und $A = C^T \cdot C = C^2$.
- (4) Es existiert $F \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass $A = F^T \cdot F$.

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Sei λ ein Eigenwert von A , und sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ so, dass $A \cdot x = \lambda \cdot x$. Dann gilt $0 < x^T \cdot A \cdot x = x^T \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda(x^T \cdot x)$. Wegen $x^T \cdot x \geq 0$ bedeutet das, dass $\lambda > 0$ ist.

(2) \Rightarrow (3): Da A symmetrisch ist, gibt es eine nach Koollar 18.14 eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $A = Q \cdot D \cdot Q^T$. Sei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Wegen $A \cdot (Q \cdot e_i) = Q \cdot D \cdot e_i = Q \cdot (d_i \cdot e_i) = d_i \cdot (Q \cdot e_i)$ sind alle d_i Eigenwerte von A . Also sind alle $d_i > 0$. Sei

$$W := \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}).$$

Dann gilt $W^T \cdot W = D$. Sei nun

$$C := Q \cdot W \cdot Q^T.$$

Wegen $\det(W) > 0$ ist W invertierbar. Somit ist auch C invertierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} C^T &= Q \cdot W^T \cdot Q^T \\ &= (Q^T)^T \cdot W \cdot Q^T \\ &= C. \end{aligned}$$

Folglich ist C symmetrisch. Es gilt $C^T \cdot C = Q \cdot W^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot W \cdot Q^T = Q \cdot W^T \cdot W \cdot Q^T = Q \cdot D \cdot Q^T = A$. Somit gilt (3)

(3) \Rightarrow (4): Die Matrix $F := C$ leistet das Gewünschte.

(4) \Rightarrow (1): Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Es gilt $x^T \cdot A \cdot x = x^T \cdot F^T \cdot F \cdot x = (F \cdot x)^T \cdot (F \cdot x)$. Da F invertierbar ist, ist $F \cdot x \neq 0$, also ist $(F \cdot x)^T \cdot (F \cdot x) > 0$. ■

DEFINITION 18.19. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Der k -te Hauptminor von A ist die Determinante der $k \times k$ -Matrix B , die durch $B[i, j] := A[i, j]$ für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ definiert ist.

Der k -te Hauptminor ist also die Determinante des nordwestlichen $k \times k$ -Ecks von A .

LEMMA 18.20. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \text{GL}(n-1, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{array}{c} | \\ c \\ | \end{array} \\ \hline -c^T & d \end{array} \right).$$

Dann gilt $\det(A) = \det(B) \cdot (d - c^T \cdot B^{-1} \cdot c)$.

Beweis: Sei $a := -B^{-1} \cdot c$, und sei X die Matrix, die durch

$$X := \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \begin{array}{c} | \\ a \\ | \end{array} \\ \hline - & 0 & - & | \\ & & & 1 \end{array} \right)$$

definiert ist. Durch Entwickeln nach der letzten Zeile erhält man $\det(X) = \det(B^{-1})$. Es gilt

$$\begin{aligned} A \cdot X &= \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{array}{c} | \\ c \\ | \end{array} \\ \hline -c^T & d \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & \begin{array}{c} | \\ a \\ | \end{array} \\ \hline - & 0 & - & | \\ & & & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & \begin{array}{c} | \\ B \cdot a + c \\ | \end{array} \\ \hline -c^T \cdot B^{-1} & c^T \cdot a + d \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} E_{n-1} & \begin{array}{c} | \\ 0 \\ | \end{array} \\ \hline -c^T \cdot B^{-1} & -c^T \cdot B^{-1} \cdot c + d \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die Determinante der letzten Matrix kann man durch Entwickeln nach der letzten Spalte ausrechnen. Es gilt also

$$\det(A) \cdot \det(X) = -c^T \cdot B^{-1} \cdot c + d.$$

Somit gilt wegen $\det(X) = \frac{1}{\det(B)}$ die Gleichheit $\det(A) = \det(B) \cdot (-c^T \cdot B^{-1} \cdot c + d)$.

SATZ 18.21. Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = A^T$. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist positiv definit.
- (2) Alle n Hauptminoren von A sind positiv.

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Sei $k \in \{1, \dots, n\}$, und sei $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ die Matrix, die aus den ersten k Zeilen der ersten k Spalten von A besteht. Wir zeigen nun, dass B positive Determinante hat. Da B eine symmetrische Matrix ist, gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$, sodass $D = Q^T \cdot B \cdot Q$ eine Diagonalmatrix $\text{diag}(d_1, \dots, d_k)$ ist. Wir zeigen als nächstes, dass alle $d_i > 0$ sind. Da Q eine orthogonale Matrix ist, ist ihre i -te Spalte, also $Q \cdot e_i$, nicht der Nullvektor. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = Q \cdot e_i$ und $y_{k+1} = \dots = y_n = 0$. Da A positiv definit ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &< y^T \cdot A \cdot y \\ &= (Q \cdot e_i)^T \cdot B \cdot (Q \cdot e_i) \\ &= e_i^T \cdot D \cdot e_i \\ &= d_i. \end{aligned}$$

Wegen $\det(B) = \det(Q)^2 \prod_{i=1}^k d_i$ gilt also auch $\det(B) > 0$.

(2) \Rightarrow (1): Wir beweisen diese Implikation mit Induktion nach n . Für $n = 1$ erhalten wir, dass $A = (A[1, 1])$ ist. Der erste Hauptminor von A ist $A[1, 1]$. Wenn diese Zahl positiv ist, so gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass $A[1, 1]x^2 > 0$; somit ist A positiv definit.

Sei nun $n \geq 2$. Wir finden $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}$, sodass

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix} | \\ c \\ | \end{matrix} \\ \hline - & c^T & - \\ \hline & & d \end{array} \right).$$

Da B symmetrisch ist und alle Hauptminoren von B positiv sind, ist B nach Induktionsvoraussetzung positiv definit. Sei nun $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Wir berechnen $x^T \cdot A \cdot x$.

Wenn $x_n = 0$, so gilt

$$x^T \cdot A \cdot x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Da B positiv definit ist, ist das > 0 .

Wenn $x_n \neq 0$, so setzen wir $y = \frac{1}{x_n} * x$, und $z := (y_1, \dots, y_{n-1})^T$. Wir zeigen nun

$$(18.1) \quad y^T \cdot A \cdot y > 0.$$

Dazu berechnen wir als erstes $y^T \cdot A \cdot y$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (18.2) \quad y^T \cdot A \cdot y &= y^T \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{array}{c} | \\ c \\ | \end{array} \\ \hline -c^T & d \end{array} \right) \cdot y \\
 &= (-z^T \quad, \quad 1) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{array}{c} | \\ c \\ | \end{array} \\ \hline -c^T & d \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-z^T \cdot B + c^T \quad, \quad z^T \cdot c + d) \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= z^T \cdot B \cdot z + c^T \cdot z + z^T \cdot c + d \\
 &= z^T \cdot B \cdot z + 2c^T \cdot z + d.
 \end{aligned}$$

Da B symmetrisch und positiv definit ist, gibt es ein $C \in \text{GL}(n-1, \mathbb{R})$, sodass $B = C^T \cdot C$ und $C^T = C$. Es gilt

$$\langle C \cdot z + C^{-1} \cdot c, C \cdot z + C^{-1} \cdot c \rangle \geq 0.$$

Das bedeutet

$$z^T \cdot C^T \cdot C \cdot z + 2c^T \cdot (C^{-1})^T \cdot C \cdot z + c^T \cdot (C^{-1})^T \cdot C^{-1} \cdot c \geq 0.$$

Wir verwenden nun

$$\begin{aligned}
 C^T \cdot C &= B, \\
 (C^{-1})^T \cdot C &= (C^{-1})^T \cdot C^T = (C \cdot C^{-1})^T = E_{n-1},
 \end{aligned}$$

und

$$(C^{-1})^T \cdot C^{-1} = (C^T)^{-1} \cdot C^{-1} = (C \cdot C^T)^{-1} = (C^T \cdot C)^{-1} = B^{-1},$$

und erhalten somit

$$(18.3) \quad z^T \cdot B \cdot z + 2c^T \cdot z + c^T \cdot B^{-1} \cdot c \geq 0.$$

Da alle Hauptminoren von A positiv sind, haben A und B positive Determinante. Also folgt aus Lemma 18.20, dass $d > c^T \cdot B^{-1} \cdot c$. Somit erhalten wir aus Gleichung (18.3), dass der letzte Ausdruck in (18.2) positiv ist, dass also $z^T \cdot B \cdot z + 2c^T \cdot z + d > 0$. Es gilt also $y^T \cdot A \cdot y > 0$, und somit $x^T \cdot A \cdot x = x_n^2 (y^T \cdot A \cdot y) > 0$. Also ist A positiv definit. ■