KAPITEL 17

Der Dualraum eines Vektorraums

1. Vektorräume von Homomorphismen

DEFINITION 17.1. Seien V, W Vektorräume über dem Körper K. Mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ bezeichnen wir die Menge aller Homomorphismen von V nach W.

Für $g, h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ sind $g + h : V \to W, v \mapsto g(v) + h(v)$ und $\alpha * g : V \to W$, $v \mapsto \alpha * g(v)$ wieder Homomorphismen. Mit diesen Operationen ist $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein Vektorraum über K.

SATZ 17.2. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K mit* $\dim(V) > 0$ *und* $\dim(W) > 0$, *sei* $B = (v_1, \ldots, v_m)$ *eine Basis von V und* $C = (w_1, \ldots, w_n)$ *eine Basis von W, und sei $K^{n\times m}$ der Vektorraum aller $n \times m$-Matrizen über K. Die Abbildung Φ ist definiert durch*

$$\begin{array}{rcrcl} \Phi & : & \mathrm{Hom}_K(V, W) & \longrightarrow & K^{n\times m} \\ & & g & \longmapsto & S_g(B, C). \end{array}$$

Dann ist Φ ein Isomorphismus.

KOROLLAR 17.3. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K. Dann gilt* $\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

SATZ 17.4. *Seien V, W Vektorräume über K, sei B eine Basis von V, und sei C eine Basis von W. Für $b \in B$ und $c \in C$ sei $\varphi[b, c] \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ jene lineare Abbildung, die $\varphi[b, c](b) = c$ und $\varphi[b, c](b') = 0$ für alle $b' \in B \setminus \{b\}$ erfüllt. Dann gilt:*

(1) *Die Menge $D = \{\varphi[b, c] \mid b \in B, c \in C\}$ ist linear unabhängig.*
(2) *D ist genau dann eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, wenn V endlichdimensional oder $W = \{0\}$ ist.*

2. Der Dualraum

DEFINITION 17.5. Sei V ein Vektorraum über K. Der *Dualraum* von V ist definiert durch $V^\star := \mathrm{Hom}(V, K)$.

$V^\star$ ist also die Menge aller linearen Abbildungen von V in den eindimensionalen Vektorraum K.

DEFINITION 17.6. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$. Wir definieren nun $B^\star = (b^\star{}_1, \dots, b^\star{}_n)$ als Folge von Vektoren in $V^\star$. Dazu sei für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung $b^\star{}_i \in V^\star$ jener Homomorphismus von V nach K, der

$$b^\star{}_i(b_i) = 1, \; b^\star{}_i(b_j) = 0 \text{ für } j \neq i.$$

erfüllt.

LEMMA 17.7. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$, sei $B^\star = (b^\star{}_1, \dots, b^\star{}_n)$ wie in Definition 17.6, und sei $x \in V$. Dann gilt:*

(1) $b^\star{}_i(x) = (x)_B[i]$.
(2) $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i) * b^\star{}_i(x)$.

Beweis: (1) Sei $(y_1, \dots, y_n) := (x)_B$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b^\star{}_i(x) \, * \, b_i &= \sum_{i=1}^{n} b^\star{}_i\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j * b_j\Big) \, * \, b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j * b^\star{}_i(b_j)\Big) \, * \, b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \, * \, b_i \\ &= x.\end{aligned}$$

Also gilt $(b^\star{}_1(x), \dots, b^\star{}_n(x)) = (x)_B$.

(2): Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i) \cdot b^\star{}_i(x) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i) \cdot (x)_B[i] \\ &= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} (x)_B[i] * b_i\Big) \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

■

SATZ 17.8. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, B eine Basis von V, und $B^\star$ wie in Definition 17.6. Dann ist $B^\star$ eine Basis von $V^\star$.*

Beweis: Wir zeigen als erstes, dass $B^\star$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ so, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b^\star{}_i = 0$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b^\star{}_i(b_j) = \lambda_j$. Also ist $B^\star$ linear unabhängig. Wegen Lemma 17.7 (2) gilt für $\varphi \in V^\star$, dass $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i) * b^\star{}_i$, also ist $\varphi \in L(B^\star)$. ■

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum bezeichnen wir $B^\star$ als die *zu B duale Basis von $V^\star$*. Die Koordinaten eines Elements von $V^\star$ bezüglich $B^\star$ lassen sich mit Lemma 17.7 berechnen: Für jedes $\varphi \in V^\star$ gilt $(\varphi)_{B^\star} = (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$, oder, anders geschrieben,

$$(\varphi)_{B^\star}[i] = \varphi(b_i). \tag{17.1}$$

Wir halten noch eine Folgerung von Satz 17.8 fest:

KOROLLAR 17.9. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann gilt* $\dim(V) = \dim(V^\star)$.

DEFINITION 17.10. Seien V, W Vektorräume über dem Körper K, und sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Wir definieren die *zu f duale Abbildung $f^\star$* durch

$$\begin{array}{rcccl} f^\star & : & W^\star & \longrightarrow & V^\star \\ & & \varphi & \longmapsto & f^\star(\varphi), \\[1ex] f^\star(\varphi) & : & V & \longrightarrow & K \\ & & v & \longmapsto & \varphi(f(v)). \end{array}$$

Es gilt also $f^\star(\varphi) = \varphi \circ f$. Somit ist $f^\star(\varphi)$ wieder eine lineare Abbildung, und liegt daher in $V^\star$.

Wir werden nun sehen, dass $f^\star$ nicht nur eine Funktion, sondern sogar ein Homomorphismus von $W^\star$ nach $V^\star$ ist.

LEMMA 17.11. *Seien V, W Vektorräume über dem Körper K, und sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt $f^\star \in \mathrm{Hom}(W^\star, V^\star)$.*

Beweisskizze: Für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi \in W^\star$, $v \in V$, $\alpha \in K$ rechnet man nach: $f^\star(\varphi_1 + \varphi_2)(v) = f^\star(\varphi_1)(v) + f^\star(\varphi_2)(v)$ und $f^\star(\alpha * \varphi)(v) = (\alpha * f^\star(\varphi))(v)$. ∎

SATZ 17.12. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K mit* $\dim(V) > 0$, $\dim(W) > 0$, *und sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus, B eine Basis von V, und C eine Basis von W. Dann gilt*

$$S_{f^\star}(C^\star, B^\star) = (S_f(B, C))^T.$$

Beweis: Sei $B = (b_1, \dots, b_m)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$, und sei $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt $S_{f^\star}(C^\star, B^\star)[i, j] = (f^\star(c^\star_j))_{B^\star}[i]$. Wegen Gleichung (17.1) ist das gleich $f^\star(c^\star_j)\,(b_i) = (c^\star_j \circ f)\,(b_i) = c^\star_j(f(b_i))$. Wegen Lemma 17.7 (1) ist das gleich $(f(b_i))_C[j] = S_f(B, C)[j, i]$. ∎

3. Der Bidualraum

DEFINITION 17.13. Sei V ein Vektorraum über K. Der *Bidualraum* von V ist definiert als $(V^\star)^\star$, und wird auch einfacher mit $V^{\star\star}$ bezeichnet.

SATZ 17.14. *Sei V ein Vektorraum über K, und sei $\Phi : V \to V^{\star\star}$ gegeben durch*

$$\begin{array}{rcrcl} \Phi & : & V & \longrightarrow & V^{\star\star} \\ & & v & \longmapsto & \Phi(v), \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcrcl} \Phi(v) & : & V^{\star} & \longrightarrow & K \\ & & \varphi & \longmapsto & \varphi(v). \end{array}$$

Dann ist Φ ein Monomorphismus von V nach $V^{\star\star}$. Wenn V endlichdimensional ist, ist Φ sogar ein Isomorphismus.

Für $v \in V$ und $\varphi \in V^{\star}$ gilt also $\Phi(v)\,(\varphi) = \varphi(v)$. Vektorräume, für die Φ ein Isomorphismus von V nach $V^{\star\star}$ ist, heißen *reflexiv*. Jeder endlichdimensionale Vektorraum ist also reflexiv.