

Die Jordansche Normalform

1. Einsetzen von Matrizen in Polynome

DEFINITION 16.1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times n}$. Sei $p = \sum_{i=0}^n p_i t^i \in K[t]$. Dann definieren wir $\hat{p}(A)$ durch

$$\hat{p}(A) := \sum_{i=0}^n p_i * A^i.$$

Dabei ist $A^0 := E_n$, $A^n := A^{n-1} \cdot A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

SATZ 16.2. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n \times n}$, und seien $p, q \in K[t]$. Dann gilt $\hat{p}(A) \cdot \hat{q}(A) = (\hat{pq})(A)$.

ÜBUNGSAUFGABEN 16.3.

- (1) Sei A eine $n \times n$ -Matrix über K , und seien $p, q \in K[t]$. Zeigen Sie, dass für die Matrizen $B := \hat{p}(A)$ und $C := \hat{q}(A)$ gilt, dass $B \cdot C = C \cdot B$.

SATZ 16.4 (Satz von Cayley-Hamilton). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n \times n}$, und sei $c = \sum_{i=0}^n \gamma_i t^i \in K[t]$ das charakteristische Polynom von A . Dann gilt $\hat{c}(A) = 0$.

Beweis: Sei $C := t * E_n - A$, und sei $B := C^{\text{ad}}$. Die Matrix B hat als Einträge Polynome in $K[t]$ vom Grad $\leq n - 1$. Es gibt also Matrizen $B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in K^{n \times n}$, sodass

$$B = t^0 * B_0 + t^1 * B_1 + \dots + t^{n-1} * B_{n-1}.$$

Da

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & c \end{pmatrix},$$

gilt

$$(16.1) \quad B \cdot C = \sum_{i=0}^n \left((\gamma_i t^i) * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sei nun für $i \in \{0, \dots, n\}$ die Matrix D_i definiert durch $D_i := \gamma_i * E_n$. Aus Gleichung (16.1) ergibt sich

$$B \cdot C = \sum_{i=0}^n t^i * D_i,$$

also

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i * B_i \right) \cdot (t * E_n - A) = \sum_{i=0}^n t^i * D_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1} * B_i - \sum_{i=0}^{n-1} t^i * (B_i \cdot A) &= \left(\sum_{j=1}^n t^j * B_{j-1} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} t^i * (B_i \cdot A) \right) - t^0 * (B_0 \cdot A) \\ &= t^0 * (-B_0 \cdot A) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} t^i * (B_{i-1} - B_i \cdot A) \right) + t^n * B_{n-1}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $D_0 = -B_0 \cdot A$, für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt $D_i = B_{i-1} - B_i \cdot A$, und $D_n = B_{n-1}$. Wir berechnen nun $\hat{c}(A)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{c}(A) &= \sum_{i=0}^n \gamma_i * A^i \\ &= \sum_{i=0}^n D_i \cdot A^i \\ &= -B_0 \cdot A + \sum_{i=1}^{n-1} B_{i-1} \cdot A^i - \sum_{i=1}^{n-1} B_i \cdot A^{i+1} + B_{n-1} \cdot A^n \\ &= -B_0 \cdot A + B_0 \cdot A - B_{n-1} \cdot A^n + B_{n-1} \cdot A^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

ÜBUNGSAUFGABEN 16.5.

- (1) Berechnen Sie die Matrizen B_0, B_1, B_2 aus dem Beweis von Satz 16.4 für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, und weisen Sie nach, dass $-B_0 \cdot A, B_0 - B_1 \cdot A, B_1 - B_2 \cdot A$ und B_2 Diagonalmatrizen sind.

2. Zerlegung in invariante Unterräume

In diesem Kapitel bezeichnen wir für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ den Endomorphismus, der x auf $A \cdot x$ abbildet, stets mit h_A .

DEFINITION 16.6. Sei V ein Vektorraum, und sei $h : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ein Unterraum U von V ist *h-invariant* : $\Leftrightarrow h(U) \subseteq U$.

LEMMA 16.7. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, und $p \in K[t]$. Sei $B := \hat{p}(A)$. Dann ist $N(B)$ ein h_A -invarianter Unterraum von V .

Beweis: Sei $u \in N(B)$. Dann gilt $\hat{p}(B) \cdot u = 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \hat{p}(B) \cdot (A \cdot u) &= \left(\sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i * A^i \right) \cdot (A \cdot u) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i * A^{i+1} \right) \cdot u \\ &= A \cdot \left(\sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i * A^i \right) \cdot u \\ &= A \cdot B \cdot u \\ &= A \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

DEFINITION 16.8. Sei K ein kommutativer Ring mit Eins, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times m}$, $B \in K^{n \times n}$. Dann definieren wir die $(m+n) \times (m+n)$ -Matrix $A \oplus B$ durch

$$A \oplus B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

SATZ 16.9. Sei K ein kommutativer Ring mit Eins, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times m}$, $B \in K^{n \times n}$. Dann gilt $\det(A \oplus B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Beweis: Induktion nach m . Wenn $m = 1$, so entwickeln wir nach der ersten Zeile und

$$\text{erhalten } \det \left(\begin{array}{c|c} A(1,1) & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = A(1,1) \cdot \det(B) = \det(A) \det(B).$$

Wenn $m \geq 2$, so erhalten wir durch Entwickeln nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det(A \oplus B) &= \sum_{i=1}^m A(1, i) \cdot \det((A \oplus B)^{[1,i]}) \\ &= \sum_{i=1}^m A(1, i) \cdot \det(A^{[1,i]} \oplus B). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der letzte Ausdruck gleich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A(1, i) \cdot \det(A^{[1, i]}) \cdot \det(B) &= \det(B) \cdot \sum_{i=1}^m A(1, i) \det(A^{[1, i]}) \\ &= \det(B) \det(A). \end{aligned}$$

■

SATZ 16.10 (Zerlegung einer Abbildung auf invariante Unterräume). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper, und sei $A \in K^{(m+n) \times (m+n)}$. Seien U und V Unterräume von K^{m+n} mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) U ist m -dimensional mit Basis $B_U = (u_1, \dots, u_m)$.
- (2) V ist n -dimensional mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$.
- (3) U und V sind beide h_A -invariant.
- (4) K^{m+n} ist die direkte Summe von U und V , also $U + V = K^{m+n}$ und $U \cap V = \{0\}$.

Sei $\varphi_1 := (h_A)|_U$ die Einschränkung von h_A auf U , und sei $A_1 := S_{\varphi_1}(B_U, B_U)$.
Sei $\varphi_2 := (h_A)|_V$ die Einschränkung von h_A auf V , und sei $A_2 := S_{\varphi_2}(B_V, B_V)$.
Sei $B = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$.

Dann gilt:

- (1) B ist eine Basis von K^{m+n} , und es gilt

$$S_{h_A}(B, B) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right).$$

- (2) Für die charakteristischen Polynome gilt $c_A = c_{A_1} \cdot c_{A_2}$.

Beweis: (1) Sei $v \in K^{m+n}$, und sei $(v)_B =: (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_A(v) &= h_A\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i h_A(u_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i h_A(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m A_1(j, i) u_j\right) + \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\sum_{j=1}^n A_2(j, i) v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m A_1(j, i) \alpha_i\right) u_j + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n A_2(j, i) \beta_i\right) v_j. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(h_A(v))_B = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

(2) Da A ähnlich zu $S_{h_A}(B, B)$ ist, haben A und $S_{h_A}(B, B)$ das gleiche charakteristische Polynom. Es gilt also

$$\begin{aligned} c_A &= \det(t * E_{m+n} - \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)) \\ &= \det \left(\begin{array}{c|c} t * E_m - A_1 & 0 \\ \hline 0 & t * E_n - A_2 \end{array} \right) \\ &= \det(t * E_m - A_1) \det(t * E_n - A_2) \\ &= c_{A_1} c_{A_2}. \end{aligned}$$

■

Eine Zerlegung des charakteristischen Polynoms von A in teilerfremde Faktoren liefert eine Zerlegung in h_A -invariante Unterräume:

SATZ 16.11. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, und seien $p, q \in K[t]$ so dass $pq = c_A$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$. Sei $B_1 := \hat{p}(A)$ und $B_2 := \hat{q}(A)$, und seien $U_1 := N(B_1)$ und $U_2 := N(B_2)$ die Nullräume von B_1 und B_2 . Dann sind U_1 und U_2 zwei h_A -invariante Unterräume von K^n , und K^n ist die direkte Summe von U_1 und U_2 .

Beweis: Wegen Lemma 16.7 sind U_1 und U_2 beide h_A -invariant. Wir zeigen nun $K^n \subseteq U_1 + U_2$. Sei dazu $x \in K^n$. Seien $a, b \in K[t]$ mit $ap + bq = 1$. Dann gilt

$$(\hat{a}p)(A) + (\hat{b}q)(A) = \hat{1}(A),$$

also

$$(\hat{a}p)(A) + (\hat{b}q)(A) = E_n,$$

und somit

$$(\hat{a}p)(A) \cdot x + (\hat{b}q)(A) \cdot x = x.$$

Nun gilt $\hat{q}(A) \cdot (\hat{a}p)(A) \cdot x = \hat{a}(A) \cdot \hat{c}_A(A) \cdot x$. Wegen des Satzes von Cayley-Hamilton (Satz 16.4) ist $\hat{c}_A(A) = 0$, also gilt $(\hat{a}p)(A) \cdot x \in U_2$. Genauso gilt $(\hat{b}q)(A) \cdot x \in U_1$.

Wir zeigen nun, dass die Summe direkt ist: Sei $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $x = (\hat{a}p)(A) \cdot x + (\hat{b}q)(A) \cdot x = \hat{a}(A) \cdot \hat{p}(A) \cdot x + \hat{b}(A) \cdot \hat{q}(A) \cdot x = \hat{a}(A) \cdot 0 + \hat{b}(A) \cdot 0 = 0$. ■

ÜBUNGS-AUFGABEN 16.12.

(1) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -30 & -24 & -29 & -1 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \\ 37 & 28 & 36 & 1 \\ -241 & -200 & -250 & -7 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $c_A = (t^2 - 5t + 6)(t + 4)^2$.

- (a) Benutzen Sie diese Zerlegung von c_A , um h_A -invariante Unterräume U_1 und U_2 mit $\mathbb{R}^4 = U_1 \dot{+} U_2$, $U_1 \neq \{0\}$, $U_2 \neq \{0\}$ zu finden.
- (b) Finden Sie Basen B_1, B_2 von U_1 und U_2 .
- (c) Berechnen Sie $S_{h_A}(B_1, B_2)$.
- (2) Sei $A \in K^{n \times n}$, und seien $p, q \in K[t]$ so, dass $(\hat{p}q)(A) = 0$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$. Zeigen Sie, dass der Spaltenraum von $\hat{p}(A)$ gleich dem Nullraum von $\hat{q}(A)$ ist.
- (3) Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit $A^2 = A$. Zeigen Sie, dass $K^n = N(A) \dot{+} S(A)$.
- (4) Sei $A \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. Es gilt $c_A = (t - 2)(t + 4)^2$.
- (a) Bestimmen Sie $U_1 = N(A - 2 * E)$ und $U_2 = N((A + 4 * E)^2)$.
- (b) Finden Sie aus der Darstellung $a(t) \cdot (t - 2) + b(t) \cdot (t + 4)^2 = 1$ Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $A_1 \cdot x \in U_1$, $A_2 \cdot x \in U_2$, $A_1 \cdot x + A_2 \cdot x = x$. (*Hinweis:* Verwenden Sie Mathematica und `PolynomialExtendedGCD[p, q, t]`).
- (c) Berechnen Sie Basen für den Spaltenraum von A_1 und von A_2 .

3. Die Haupträume einer Matrix

DEFINITION 16.13. Sei $A \in K^{n \times n}$, sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A , und sei e die algebraische Vielfachheit von λ in A . Dann ist der *Hauptraum von A bezüglich λ* , $U(A, \lambda)$, definiert als der Nullraum von $(A - \lambda * E_n)^e$.

Wir untersuchen jetzt diese Haupträume, und dazu als erstes nilpotente Matrizen.

DEFINITION 16.14. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times n}$. Die Matrix A ist *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$.

ÜBUNGS-AUFGABEN 16.15.

In den folgenden Beispielen ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und $A, B \in K^{n \times n}$.

- (1) Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $N(A^{m+1}) \subseteq N(A^m)$.
- (2) Zeigen Sie: Wenn $m \in \mathbb{N}_0$ so ist, dass $N(A^m) = N(A^{m+1})$, so gilt $N(A^m) = N(A^j)$ für alle $j \geq m$.
- (3) Zeigen Sie: wenn A nilpotent ist, so ist $A^n = 0$. (Die Zahl n ist das Format der Matrix).
- (4) Sei $x \in K^n$, und sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $A^k \cdot x = 0$. Sei $c_A(t) = t^e \cdot r(t)$, sodass t das Polynom $r(t)$ nicht teilt. Zeigen Sie, dass $A^e \cdot x = 0$. *Hinweis:* Für $p(t) := t^e \cdot r(t)$ und für $q(t) := t^k$ gilt $\hat{p}(A) \cdot x = \hat{q}(A) \cdot x = 0$. Was bedeutet das für $h = \text{ggT}(p, q)$?
- (5) Seien A, B nilpotent und so, dass $A \cdot B = B \cdot A$. Zeigen Sie, dass $A + B$ nilpotent ist.
- (6) Sei A nilpotent. Zeigen Sie, dass $E_n - A$ invertierbar ist.

Wir berechnen nun das charakteristische Polynom einer nilpotenten Matrix.

LEMMA 16.16. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $A \in K^{m \times m}$. Wir nehmen an, dass es $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$. Dann gilt $c_A = t^m$.

Beweis: Sei $E := E_m$, und sei k so, dass $A^k = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} (t * E - A) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} t^{(k-1)-i} * A^i \right) &= \sum_{i=0}^{k-1} t^{k-i} * A^i - \sum_{i=0}^{k-1} t^{k-(i+1)} * A^{i+1} \\ &= t^k * A^0 - t^0 * A^k \\ &= t^k * E. \end{aligned}$$

Also gilt $\det(t * E - A) \cdot \det\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^{(k-1)-i} * A^i\right) = t^{km}$. Es gilt also $c_A \mid t^{km}$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren (Satz 13.32) ist jeder Teiler von t^{km} von der Form αt^r mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$ und $r \in \{0, \dots, km\}$. Da c_A normiert ist und Grad m hat, gilt also $c_A = t^m$. ■

KOROLLAR 16.17. *Sei K ein Körper, $m \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times m}$, und sei $\lambda \in K$ so, dass $A - \lambda * E$ nilpotent ist. Dann gilt $c_A = (t - \lambda)^m$.*

Beweis: $c_A = \det(t * E - A) = \det((t - \lambda) * E - (A - \lambda * E)) = c_{A - \lambda * E}(t - \lambda) = (t - \lambda)^m$. ■

Nun können wir die Dimension der Haupträume bestimmen.

SATZ 16.18. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times n}$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit e , und sei $U := N((A - \lambda * E)^e)$ der Hauptraum von A zum Eigenwert λ . Sei $h := h_A$, also $h(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$. Dann gilt:*

- (1) U ist h -invariant.
- (2) Es gibt einen h -invarianten Unterraum V von K^n , sodass $K^n = U \dot{+} V$.
- (3) $\dim(U) = e$.
- (4) Sei $B_U = (u_1, \dots, u_e)$ eine Basis von U , sei $\varphi := h|_U$, und sei $A_1 := S_\varphi(B_U, B_U)$. Dann gilt $c_{A_1} = (t - \lambda)^e$.

Beweis: (1) Für $p = (t - \lambda)^e$ gilt $\hat{p}(A) = (A - \lambda * E)^e$. Wegen Lemma 16.7 ist $U = N(\hat{p}(A))$ h -invariant.

(2) Wir schreiben c_A als $(t - \lambda)^e \cdot q$, sodass $t - \lambda$ das Polynom q nicht teilt. Wegen Satz 16.11 gilt $K^n = U \dot{+} N(\hat{q}(A))$, also leistet $V := N(\hat{q}(A))$ das Gewünschte.

(3) Sei $d := \dim(U)$, und sei $B_U = (u_1, \dots, u_d)$ eine Basis von U . Sei $B_V = (v_1, \dots, v_{n-d})$ eine Basis von V . Sei $A_1 := S_{h|_U}(B_U, B_U)$ und $A_2 := S_{h|_V}(B_V, B_V)$. Wegen Satz 16.10 gilt

$$(16.2) \quad c_A = c_{A_1} \cdot c_{A_2}.$$

Wir zeigen als nächstes:

$$(16.3) \quad (A_1 - \lambda * E_m)^e = 0.$$

Dazu beobachten wir, dass für $\varphi := h|_U - \lambda * \text{id}_U$ gilt: $A_1 - \lambda * E_m = S_\varphi(B_U, B_U)$. Wir wissen, dass für alle $x \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (A_1 - \lambda * E_m)^e \cdot (x)_{B_U} &= (S_\varphi(B_U, B_U))^e \cdot (x)_{B_U} \\ &= \underbrace{(\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi(x))}_{B_U} \\ &= \underbrace{((h - \lambda * \text{id}_{K^n}) \circ \dots \circ (h - \lambda * \text{id}_{K^n}))(x)}_{B_U} \\ &= \underbrace{(A - \lambda * E)^e \cdot x}_{B_U}. \end{aligned}$$

Da $x \in N((A - \lambda * E)^e)$, gilt insgesamt $((A_1 - \lambda * E_m)^e \cdot x)_{B_U} = (0)_{B_U} = 0$. Also gilt für alle $y \in K^m$, dass $(A_1 - \lambda * E_m)^e \cdot y = 0$, und somit gilt $(A_1 - \lambda * E_m)^e = 0$. Das beweist (16.3). Wegen Korollar 16.17 gilt also

$$(16.4) \quad c_{A_1} = (t - \lambda)^d.$$

Wegen (16.2) gilt $(t - \lambda)^d | c_A$. Da die Vielfachheit der Nullstelle λ in c_A gleich e ist, gilt $d \leq e$.

Wir zeigen nun $d = e$. Nehmen wir dazu an, dass $d < e$. Dann gilt wegen (16.2), dass $t - \lambda$ auch c_{A_2} teilt. Folglich ist λ ein Eigenwert von A_2 . Sei $w = (w_1, \dots, w_{n-d}) \in K^{n-d}$ ein Eigenvektor von A_2 , und sei $x \in V$ so, dass $(x)_{B_V} = w$. Dann gilt $(A \cdot x)_{B_V} = (h(x))_{B_V} = S_{h|_V}(B_V, B_V) \cdot w = A_2 \cdot w = \lambda * w = \lambda * (x)_{B_V} = (\lambda * x)_{B_V}$. Also gilt $A \cdot x = \lambda * x$, x ist folglich ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Daraus ergibt sich $x \in U$. Insgesamt liegt x also in $U \cap V$. Wegen (2) gilt dann $x = 0$, im Widerspruch dazu, dass w als Eigenvektor $\neq 0$, und somit auch $x \neq 0$ ist. Es gilt also $d = e$. Somit haben wir (3) bewiesen.

(4) folgt nun aus (3) und Gleichung (16.4). ■