KAPITEL 16

Die Jordansche Normalform

1. Einsetzen von Matrizen in Polynome

DEFINITION 16.1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n\times n}$. Sei $p = \sum_{i=0}^{n} p_i t^i \in K[t]$. Dann definieren wir $\hat{p}(A)$ durch

$$\hat{p}(A) := \sum_{i=0}^{n} p_i * A^i.$$

Dabei ist $A^0 := E_n$, $A^n := A^{n-1} \cdot A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

SATZ 16.2. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n\times n}$, und seien $p, q \in K[t]$. Dann gilt $\hat{p}(A) \cdot \hat{q}(A) = (\widehat{pq})(A)$.*

ÜBUNGSAUFGABEN 16.3.

(1) Sei A eine $n \times n$-Matrix über K, und seien $p, q \in K[t]$. Zeigen Sie, dass für die Matrizen $B := \hat{p}(A)$ und $C := \hat{q}(A)$ gilt, dass $B \cdot C = C \cdot B$.

SATZ 16.4 (Satz von Cayley-Hamilton). *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n\times n}$, und sei $c = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i t^i \in K[t]$ das charakteristische Polynom von A. Dann gilt $\hat{c}(A) = 0$.*

Beweis: Sei $C := t * E_n - A$, und sei $B := C^{\mathrm{ad}}$. Die Matrix B hat als Einträge Polynome in $K[t]$ vom Grad $\leq n - 1$. Es gibt also Matrizen $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in K^{n\times n}$, sodass

$$B = t^0 * B_0 + t^1 * B_1 + \cdots + t^{n-1} * B_{n-1}.$$

Da

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & c \end{pmatrix},$$

gilt

$$B \cdot C = \sum_{i=0}^{n} \left((\gamma_i t^i) * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{16.1}$$

Sei nun für $i \in \{0, \dots, n\}$ die Matrix D_i definiert durch $D_i := \gamma_i * E_n$. Aus Gleichung (16.1) ergibt sich

$$B \cdot C = \sum_{i=0}^{n} t^i * D_i,$$

also

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i * B_i\right) \cdot (t * E_n - A) = \sum_{i=0}^{n} t^i * D_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1} * B_i - \sum_{i=0}^{n-1} t^i * (B_i \cdot A) &= \Big(\sum_{j=1}^{n} t^j * B_{j-1}\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n-1} t^i * (B_i \cdot A)\Big) - t^0 * (B_0 \cdot A) \\ &= t^0 * (-B_0 \cdot A) + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} t^i * (B_{i-1} - B_i \cdot A)\Big) + t^n * B_{n-1}.\end{aligned}$$

Folglich gilt $D_0 = -B_0 \cdot A$, für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt $D_i = B_{i-1} - B_i \cdot A$, und $D_n = B_{n-1}$. Wir berechnen nun $\hat{c}(A)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{c}(A) &= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i * A^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} D_i \cdot A^i \\ &= -B_0 \cdot A + \sum_{i=1}^{n-1} B_{i-1} \cdot A^i - \sum_{i=1}^{n-1} B_i \cdot A^{i+1} + B_{n-1} \cdot A^n \\ &= -B_0 \cdot A + B_0 \cdot A - B_{n-1} \cdot A^n + B_{n-1} \cdot A^n \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

ÜBUNGSAUFGABEN 16.5.

(1) Berechnen Sie die Matrizen B_0, B_1, B_2 aus dem Beweis von Satz 16.4 für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, und weisen Sie nach, dass $-B_0 \cdot A$, $B_0 - B_1 \cdot A$, $B_1 - B_2 \cdot A$ und B_2 Diagonalmatrizen sind.

2. Zerlegung in invariante Unterräume

In diesem Kapitel bezeichnen wir für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ den Endomorphismus, der x auf $A \cdot x$ abbildet, stets mit h_A.

DEFINITION 16.6. Sei V ein Vektorraum, und sei $h : V \to V$ ein Endomorphismus. Ein Unterraum U von V ist *h-invariant* $:\Leftrightarrow h(U) \subseteq U$.

LEMMA 16.7. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$, und $p \in K[t]$. Sei $B := \hat{p}(A)$. Dann ist $N(B)$ ein h_A-invarianter Unterraum von V.*

Beweis: Sei $u \in N(B)$. Dann gilt $\hat{p}(A) \cdot u = 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\hat{p}(A) \cdot (A \cdot u) &= \Big(\sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i * A^i\Big) \cdot (A \cdot u) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i * A^{i+1}\Big) \cdot u \\
&= A \cdot \Big(\sum_{i=0}^{\deg(p)} p_i * A^i\Big) \cdot u \\
&= A \cdot B \cdot u \\
&= A \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

DEFINITION 16.8. Sei K ein kommutativer Ring mit Eins, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{n\times n}$. Dann definieren wir die $(m + n) \times (m + n)$-Matrix $A \oplus B$ durch

$$A \oplus B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

SATZ 16.9. *Sei K ein kommutativer Ring mit Eins, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{n\times n}$. Dann gilt* $\det(A \oplus B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Beweis: Induktion nach m. Wenn $m = 1$, so entwickeln wir nach der ersten Zeile und erhalten $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A(1,1) & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\right) = A(1,1) \cdot \det(B) = \det(A)\ \det(B)$.

Wenn $m \geq 2$, so erhalten wir durch Entwickeln nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned}
\det(A \oplus B) &= \sum_{i=1}^{m} A(1,i) \cdot \det((A \oplus B)^{[1,i]}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} A(1,i) \cdot \det(A^{[1,i]} \oplus B).
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der letzte Ausdruck gleich

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} A(1,i)\cdot \det(A^{[1,i]})\cdot \det(B) &= \det(B)\cdot \sum_{i=1}^{m} A(1,i)\det(A^{[1,i]})\\ &= \det(B)\ \det(A).\end{aligned}$$

■

SATZ 16.10 (Zerlegung einer Abbildung auf invariante Unterräume). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper, und sei $A \in K^{(m+n)\times(m+n)}$. Seien U und V Unterräume von K^{m+n} mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *U ist m-dimensional mit Basis $B_U = (u_1, \ldots, u_m)$.*
(2) *V ist n-dimensional mit Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$.*
(3) *U und V sind beide h_A-invariant.*
(4) *K^{m+n} ist die direkte Summe von U und V, also $U + V = K^{m+n}$ und $U \cap V = \{0\}$.*

Sei $\varphi_1 := (h_A)|_U$ die Einschränkung von h_A auf U, und sei $A_1 := S_{\varphi_1}(B_U, B_U)$.
Sei $\varphi_2 := (h_A)|_V$ die Einschränkung von h_A auf V, und sei $A_2 := S_{\varphi_2}(B_V, B_V)$.
Sei $B = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$.

Dann gilt:

(1) *B ist eine Basis von K^{m+n}, und es gilt*

$$S_{h_A}(B,B) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right).$$

(2) *Für die charakteristischen Polynome gilt $c_A = c_{A_1} \cdot c_{A_2}$.*

Beweis: (1) Sei $v \in K^{m+n}$, und sei $(v)_B =: (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_A(v) &= h_A\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_A(u_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i h_A(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{m} A_1(j,i)\, u_j\Big) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Big(\sum_{j=1}^{n} A_2(j,i)\, v_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} A_1(j,i)\alpha_i\Big) u_j + \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} A_2(j,i)\beta_i\Big) v_j. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(h_A(v))_B = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

(2) Da A ähnlich zu $S_{h_A}(B, B)$ ist, haben A und $S_{h_A}(B, B)$ das gleiche charakteristische Polynom. Es gilt also

$$\begin{aligned} c_A &= \det(t * E_{m+n} - \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)) \\ &= \det(\left(\begin{array}{c|c} t * E_m - A_1 & 0 \\ \hline 0 & t * E_n - A_2 \end{array}\right)) \\ &= \det(t * E_m - A_1)\ \det(t * E_n - A_2) \\ &= c_{A_1}\, c_{A_2}. \end{aligned}$$

■

Eine Zerlegung des charakteristischen Polynoms von A in teilerfremde Faktoren liefert eine Zerlegung in h_A-invariante Unterräume:

SATZ 16.11. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, und seien $p, q \in K[t]$ so dass $pq = c_A$ und* $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. *Sei $B_1 := \hat{p}(A)$ und $B_2 := \hat{q}(A)$, und seien $U_1 := N(B_1)$ und $U_2 := N(B_2)$ die Nullräume von B_1 und B_2. Dann sind U_1 und U_2 zwei h_A-invariante Unterräume von K^n, und K^n ist die direkte Summe von U_1 und U_2.*

Beweis: Wegen Lemma 16.7 sind U_1 und U_2 beide h_A-invariant. Wir zeigen nun $K^n \subseteq U_1 + U_2$. Sei dazu $x \in K^n$. Seien $a, b \in K[t]$ mit $ap + pq = 1$. Dann gilt

$$(\widehat{ap})(A) + (\widehat{bq})(A) = \hat{1}(A),$$

also

$$(\widehat{ap})(A) + (\widehat{bq})(A) = E_n,$$

und somit

$$(\widehat{ap})(A) \cdot x + (\widehat{bq})(A) \cdot x = x.$$

Nun gilt $\hat{q}(A) \cdot (\widehat{ap})(A) \cdot x = \hat{a}(A) \cdot \widehat{c_A}(A) \cdot x$. Wegen des Satzes von Cayley-Hamilton (Satz 16.4) ist $\widehat{c_A}(A) = 0$, also gilt $(\widehat{ap})(A) \cdot x \in U_2$. Genauso gilt $(\widehat{bq})(A) \cdot x \in U_1$.

Wir zeigen nun, dass die Summe direkt ist: Sei $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $x = (\widehat{ap})(A) \cdot x + (\widehat{bq})(A) \cdot x = \hat{a}(A) \cdot \hat{p}(A) \cdot x + \hat{b}(A) \cdot \hat{q}(A) \cdot x = \hat{a}(A) \cdot 0 + \hat{b}(A) \cdot 0 = 0.$ ■

ÜBUNGSAUFGABEN 16.12.

(1) Sei
$$A := \begin{pmatrix} -30 & -24 & -29 & -1 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \\ 37 & 28 & 36 & 1 \\ -241 & -200 & -250 & -7 \end{pmatrix}.$$
Das charakteristische Polynom von A ist $c_A = (t^2 - 5t + 6)(t + 4)^2$.
   (a) Benutzen Sie diese Zerlegung von c_A, um h_A-invariante Unterräume U_1 und U_2 mit $\mathbb{R}^4 = U_1 \dotplus U_2$, $U_1 \neq \{0\}$, $U_2 \neq \{0\}$ zu finden.
   (b) Finden Sie Basen B_1, B_2 von U_1 und U_2.
   (c) Bilden Sie aus den Vektoren von B_1 und B_2 eine Basis B von $\mathbb{R}^4$, und berechnen Sie $S_{h_A}(B, B)$.

(2) Sei $A \in K^{n\times n}$, und seien $p, q \in K[t]$ so, dass $(\widehat{pq})(A) = 0$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. Zeigen Sie, dass der Spaltenraum von $\hat{p}(A)$ gleich dem Nullraum von $\hat{q}(A)$ ist.

(3) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit $A^2 = A$. Zeigen Sie, dass $K^n = N(A) \dotplus S(A)$.

(4) Sei $A \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. Es gilt $c_A = (t - 2)(t + 4)^2$.
   (a) Bestimmen Sie $U_1 = N(A - 2 * E)$ und $U_2 = N((A + 4 * E)^2)$.
   (b) Finden Sie aus der Darstellung $a(t) \cdot (t - 2) + b(t) \cdot (t + 4)^2 = 1$ Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $A_1 \cdot x \in U_1$, $A_2 \cdot x \in U_2$, $A_1 \cdot x + A_2 \cdot x = x$. (*Hinweis:* Verwenden Sie Mathematica und `PolynomialExtendedGCD[p, q, t]`.
   (c) Berechnen Sie Basen für den Spaltenraum von A_1 und von A_2.

(5) Sei $A \in K^{n\times n}$, und seien $p, q \in K[t]$ mit $p \mid q$. Zeigen Sie, dass dann $N(\hat{q}(A)) \subseteq N(\hat{p}(A))$. Gilt auch die Umkehrung?

3. Die Haupträume einer Matrix

DEFINITION 16.13. Sei $A \in K^{n\times n}$, sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, und sei e die algebraische Vielfachheit von λ in A. Dann ist der *Hauptraum von A bezüglich λ*, $U(A, \lambda)$, definiert als der Nullraum von $(A - \lambda * E_n)^e$.

Wir untersuchen jetzt diese Haupträume, und dazu als erstes nilpotente Matrizen.

DEFINITION 16.14. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n\times n}$. Die Matrix A ist *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$.

ÜBUNGSAUFGABEN 16.15.
In den folgenden Beispielen ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und $A, B \in K^{n\times n}$.

(1) Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $N(A^m) \subseteq N(A^{m+1})$.
(2) Zeigen Sie: Wenn $m \in \mathbb{N}_0$ so ist, dass $N(A^m) = N(A^{m+1})$, so gilt $N(A^m) = N(A^j)$ für alle $j \geq m$.
(3) Zeigen Sie: wenn A nilpotent ist, so ist $A^n = 0$. (Die Zahl n ist das Format der Matrix).
(4) Sei $x \in K^n$, und sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $A^k \cdot x = 0$. Sei $c_A(t) = t^e \cdot r(t)$, sodass t das Polynom $r(t)$ nicht teilt. Zeigen Sie, dass $A^e \cdot x = 0$. *Hinweis:* Für $p(t) := t^e \cdot r(t)$ und für $q(t) := t^k$ gilt $\hat{p}(A) \cdot x = \hat{q}(A) \cdot x = 0$. Was bedeutet das für $h = \mathrm{ggT}(p, q)$?
(5) Seien A, B nilpotent und so, dass $A \cdot B = B \cdot A$. Zeigen Sie, dass $A + B$ nilpotent ist.
(6) Sei A nilpotent. Zeigen Sie, dass $E_n - A$ invertierbar ist.

Wir berechnen nun das charakteristische Polynom einer nilpotenten Matrix.

LEMMA 16.16. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $A \in K^{m\times m}$. Wir nehmen an, dass es $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$. Dann gilt $c_A = t^m$.*

Beweis: Sei $E := E_m$, und sei k so, dass $A^k = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}(t * E - A) \cdot (\sum_{i=0}^{k-1} t^{(k-1)-i} * A^i) &= \sum_{i=0}^{k-1} t^{k-i} * A^i - \sum_{i=0}^{k-1} t^{k-(i+1)} * A^{i+1} \\ &= t^k * A^0 - t^0 * A^k \\ &= t^k * E.\end{aligned}$$

Also gilt $\det(t * E - A) \cdot \det(\sum_{i=0}^{k-1} t^{(k-1)-i} * A^i) = t^{km}$. Es gilt also $c_A \mid t^{km}$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren (Satz 13.32) ist jeder Teiler von t^{km} von der Form αt^r mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$ und $r \in \{0, \dots, km\}$. Da c_A normiert ist und Grad m hat, gilt also $c_A = t^m$. ∎

KOROLLAR 16.17. *Sei K ein Körper, $m \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times m}$, und sei $\lambda \in K$ so, dass $A - \lambda * E$ nilpotent ist. Dann gilt $c_A = (t - \lambda)^m$.*

Beweis: $c_A = \det(t * E - A) = \det((t - \lambda) * E - (A - \lambda * E)) = c_{A - \lambda * E}(t - \lambda) = (t - \lambda)^m$. ∎

Nun können wir die Dimension der Haupträume bestimmen.

SATZ 16.18. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times n}$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit e, und sei $U := N((A - \lambda * E)^e)$ der Hauptraum von A zum Eigenwert λ. Sei $h := h_A$, also $h(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$. Dann gilt:*

(1) *U ist h-invariant.*
(2) *Es gibt einen h-invarianten Unterraum V von K^n, sodass $K^n = U \dotplus V$.*
(3) $\dim(U) = e$.
(4) *Sei $B_U = (u_1, \dots, u_e)$ eine Basis von U, sei $\varphi := h|_U$, und sei $A_1 := S_\varphi(B_U, B_U)$. Dann gilt $c_{A_1} = (t - \lambda)^e$.*

Beweis: (1) Für $p = (t - \lambda)^e$ gilt $\hat{p}(A) = (A - \lambda * E_n)^e$. Wegen Lemma 16.7 ist $U = N(\hat{p}(A))$ h-invariant.

(2) Wir schreiben c_A als $(t - \lambda)^e \cdot q$, sodass $t - \lambda$ das Polynom q nicht teilt. Wegen Satz 16.11 gilt $K^n = U \dotplus N(\hat{q}(A))$, also leistet $V := N(\hat{q}(A))$ das Gewünschte.

(3) Sei $d := \dim(U)$, und sei $B_U = (u_1, \dots, u_d)$ eine Basis von U. Sei $B_V = (v_1, \dots, v_{n-d})$ eine Basis von V. Sei $A_1 := S_{h|_U}(B_U, B_U)$ und $A_2 := S_{h|_V}(B_V, B_V)$. Wegen Satz 16.10 gilt

$$c_A = c_{A_1} \cdot c_{A_2}. \tag{16.2}$$

Wir zeigen als nächstes:

$$(A_1 - \lambda * E_d)^e = 0. \tag{16.3}$$

Dazu beobachten wir, dass für $\varphi := h|_U - \lambda * \mathrm{id}_U$ gilt: $A_1 - \lambda * E_d = S_\varphi(B_U, B_U)$. Wir wissen, dass für alle $x \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}(A_1 - \lambda * E_d)^e \cdot (x)_{B_U} &= (S_\varphi(B_U, B_U))^e \cdot (x)_{B_U} \\ &= \big(\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{e}\ (x)\big)_{B_U} \\ &= \big(\underbrace{(h - \lambda * \mathrm{id}_{K^n}) \circ \cdots \circ (h - \lambda * \mathrm{id}_{K^n})}_{e}\ (x)\big)_{B_U} \\ &= \big((A - \lambda * E_n)^e \cdot x\big)_{B_U}.\end{aligned}$$

Da $x \in N((A - \lambda * E_n)^e)$, gilt insgesamt $(A_1 - \lambda * E_d)^e \cdot (x)_{B_U} = (0)_{B_U} = 0$. Also gilt für alle $y \in K^d$, dass $(A_1 - \lambda * E_d)^e \cdot y = 0$, und somit gilt $(A_1 - \lambda * E_d)^e = 0$. Das beweist (16.3). Wegen Korollar 16.17 gilt also

$$c_{A_1} = (t - \lambda)^d. \tag{16.4}$$

Wegen (16.2) gilt $(t - \lambda)^d | c_A$. Da die Vielfachheit der Nullstelle λ in c_A gleich e ist, gilt $d \leq e$.

Wir zeigen nun $d = e$. Nehmen wir dazu an, dass $d < e$. Dann gilt wegen (16.2), dass $t - \lambda$ auch c_{A_2} teilt. Folglich ist λ ein Eigenwert von A_2. Sei $w = (w_1, \dots, w_{n-d}) \in K^{n-d}$ ein Eigenvektor von A_2, und sei $x \in V$ so, dass $(x)_{B_V} = w$. Dann gilt $(A \cdot x)_{B_V} = (h(x))_{B_V} = S_{h|_V}(B_V, B_V) \cdot w = A_2 \cdot w = \lambda * w = \lambda * (x)_{B_V} = (\lambda * x)_{B_V}$. Also gilt $A \cdot x = \lambda * x$, x ist folglich ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Daraus ergibt sich $x \in U$. Insgesamt liegt x also in $U \cap V$. Wegen (2) gilt dann $x = 0$, im Widerspruch dazu, dass w als Eigenvektor $\neq 0$, und somit auch $x \neq 0$ ist. Es gilt also $d = e$. Somit haben wir (3) bewiesen.

(4) folgt nun aus (3) und Gleichung (16.4). ■

SATZ 16.19. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$. Wir nehmen an, dass c_A über K in Linearfaktoren zerfällt. Seien $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ und $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$c_A = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{e_i},$$

und die λ_i alle verschieden voneinander sind. Sei $U_i := N((A - \lambda_i * E)^{e_i})$ der zu λ_i gehörende Hauptraum von A.

Dann ist K^n die direkte Summe der h_A-invarianten Unterräume $U_1, \dots, U_r$.

Beweis: Wegen Satz 16.18 ist jedes U_i h_A-invariant. Sei nun $U := U_1 + \cdots + U_r$. Wir zeigen, dass diese Summe sogar direkt ist. Sei dazu $i \in \{1, \dots, r\}$, und sei $u \in U_i \cap \big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j\big)$.

Wenn $j \neq i$, so gilt $U_j = N((A - \lambda_j)^{e_j})$. Sei $q \in K[t]$ definiert durch $q := c_A/(t - \lambda_i)^{e_i}$. Wegen $(t - \lambda_j)^{e_j} \mid q$ gilt $U_j \subseteq N(\hat{q}(A))$. Insgesamt gilt daher $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j \subseteq N(\hat{q}(A))$.

Wegen Satz 16.11 gilt $U_i \cap N(\hat{q}(A)) = \{0\}$. Also gilt $u = 0$.

U ist also die direkte Summe $U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_r$. Nun gilt $\dim(U) = \sum_{i=1}^r \dim(U_i)$. Nach Satz 16.18 gilt also $\dim(U) = \sum_{i=1}^r e_i = n$. Folglich gilt also $U = K^n$. ■

4. Nilpotente Endomorphismen

DEFINITION 16.20. Sei V ein Vektorraum, und sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Der Endomorphismus φ ist *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $v \in V$ $\varphi^k(v) = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k}(v) = 0$.

LEMMA 16.21. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n \times n}$, und sei λ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit e. Sei $U := N((A - \lambda * E_n)^e)$. Sei $\varphi : U \to U$ definiert durch $\varphi(u) := A \cdot u - \lambda * u$, also $\varphi = h_A|_U - \lambda * \mathrm{id}_U$. Dann ist φ nilpotent auf U.*

Beweis: Sei $u \in U$. Es gilt $\varphi^e(u) = (A - \lambda * E_n)^e \cdot u = 0$, weil ja $u \in N((A - \lambda * E_n)^e)$. ■

Es folgt nun ein typisches Beispiel für einen nilpotenten Endomorphismus. Sei $e \in \mathbb{N}$ und $B = (b_1, \ldots, b_e)$ eine Basis für den Vektorraum U, und sei φ eine Abbildung mit $\varphi(b_e) = b_{e-1}$, $\varphi(b_{e-1}) = b_{e-2}$, $\ldots$, $\varphi(b_2) = b_1$, $\varphi(b_1) = 0$. Dann gilt $\varphi^e = 0$ und $\varphi^{e-1} \neq 0$. Die Matrixdarstellung von φ hat folgende Form:

$$S_\varphi(B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

DEFINITION 16.22. Sei K ein Körper, $m \in \mathbb{N}$, und sei $\lambda \in K$. Die $m \times m$-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $J[i,i] = \lambda$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $J[i, i+1] = 1$ für $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ heißt *Jordankästchen zu λ vom Format m*. Sie wird mit $J(\lambda, m)$ abgekürzt.

DEFINITION 16.23. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V. Die Folge $(v_1, \ldots, v_m)$ von Elementen aus V ist *eine Basis von V modulo U*, wenn $(v_1 + U, \ldots, v_m + U)$ eine Basis des Faktorraums V/U ist.

LEMMA 16.24. *Sei W ein Vektorraum über dem Körper K, und seien U, V Unterräume von W mit $U \subseteq V$. Wir nehmen an, dass $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W modulo V ist, und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V modulo U. Dann ist $(w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von W modulo U.*

Beweisskizze: ähnlich wie Satz 15.22. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 16.25.

(1) Seien $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_n = U$ Unterräume von U, und sei für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Folge $(b_{i,1}, \ldots, b_{i,j(i)})$ eine Basis von U_i modulo U_{i-1}. Zeigen Sie, dass $(b_{1,1}, \ldots, b_{1,j(1)}, b_{2,1}, \ldots, b_{2,j(2)}, \ldots, b_{n,1}, \ldots, b_{n,j(n)})$ eine Basis von U_n modulo U_0 ist. *Hinweis:* Lemma 16.24 und Induktion nach n.

SATZ 16.26 (Normalform für nilpotente Endomorphismen). *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei U ein n-dimensionaler Vektorraum über K, und sei $\varphi : U \to U$ ein nilpotenter Endomorphismus. Dann gibt es eine Basis B von U, ein $d \in \mathbb{N}$, und $m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}$, sodass $m_1 + \cdots + m_d = n$ und*

$$S_\varphi(B, B) = J(0, m_1) \oplus J(0, m_2) \oplus \cdots \oplus J(0, m_d).$$

Beweisskizze: Sei $U_0 := \{0\}$, und sei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ der Unterraum U_i definiert durch

$$U_i := \ker(\varphi^i).$$

Dann gilt wegen Übungsbeispiel 16.15 (3), dass $U_n = U$, und $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_n = U$.

Wir bilden nun für jedes $i \in \{n, n-1, \ldots, 0\}$ eine Basis von U_i auf folgende Weise: Zuerst wählen wir $a(n) \in \mathbb{N}_0$ und

$$(x_{n,1}, \ldots, x_{n,a(n)})$$

als Basis von U_n modulo U_{n-1}.

Als nächstes konstruieren wir eine Basis von U_{n-1} modulo U_{n-2} folgendermaßen: Die Vektoren $\varphi(x_{n,1}), \ldots, \varphi(x_{n,a(n)})$ liegen in U_{n-1}, weil für alle $k \in \{1, \ldots, a(n)\}$ die Gleichung $\varphi^{n-1}(\varphi(x_{n,k})) = \varphi^n(x_{n,k}) = 0$ gilt. Wir zeigen als nächstes, dass

$$\left(\varphi(x_{n,1}) + U_{n-2}, \ldots, \varphi(x_{n,a(n)}) + U_{n-2}\right)$$

eine linear unabhängige Folge aus U_{n-1}/U_{n-2} ist. Sei dazu

$$\sum_{j=1}^{a(n)} \lambda_j * \left(\varphi(x_{n,j}) + U_{n-2}\right) = 0 + U_{n-2}.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{a(n)} \lambda_j * \varphi(x_{n,j}) \in U_{n-2},$$

also wegen $\varphi^{n-2}[U_{n-2}] = \{0\}$

$$\varphi^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{a(n)} \lambda_j * x_{n,j}\Big) = 0.$$

Folglich gilt

$$\sum_{j=1}^{a(n)} \lambda_j * x_{n,j} \in U_{n-1}.$$

Da $(x_{n,1}, \dots, x_{n,a(n)})$ eine Basis von U_n modulo U_{n-1} ist, gilt also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{a(n)} = 0$. Da also $\big(\varphi(x_{n,1}) + U_{n-2}, \dots, \varphi(x_{n,a(n)}) + U_{n-2}\big)$ eine linear unabhängige Folge aus U_{n-1}/U_{n-2} ist, gibt es $a(n-1) \in \mathbb{N}_0$ und $(x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,a(n-1)})$ aus U_{n-1}, sodass

$$\big(\varphi(x_{n,1}), \dots, \varphi(x_{n,a(n)}),\ x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,a(n-1)}\big)$$

eine Basis von U_{n-1} modulo U_{n-2} ist.

Nun vervollständigen wir

$$\big(\varphi^2(x_{n,1}), \dots, \varphi^2(x_{n,a(n)}),\ \varphi(x_{n-1,1}), \dots, \varphi(x_{n-1,a(n-1)})\big)$$

mit $x_{n-2,1}, \dots, x_{n-2,a(n-2)}$ zu einer Basis von U_{n-2} modulo U_{n-3}. Durch Fortführung dieser Konstruktion erhalten wir Basen für jedes U_i modulo U_{i-1} mit $i \in \{1, \dots, n\}$.

Mit Lemma 16.24 und Induktion kann man nun zeigen, dass man durch Vereinigen aller dieser Basen eine Basis B von U erhält, die so aussieht:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{n,1}, & \dots, & x_{n,a(n)}, & & & & & & \\
\varphi(x_{n,1}), & \dots, & \varphi(x_{n,a(n)}), & x_{n-1,1}, & \dots, & x_{n-1,a(n-1)}, & & & \\
\varphi^2(x_{n,1}), & \dots, & \varphi^2(x_{n,a(n)}), & \varphi(x_{n-1,1}), & \dots, & \varphi(x_{n-1,a(n-1)}), & x_{n-2,1}, \dots, x_{n-2,a(n-2)} & & \\
 & & & & & & \vdots & & \\
\varphi^{n-1}(x_{n,1}), & \dots, & \varphi^{n-1}(x_{n,a(n)}), & \varphi^{n-2}(x_{n-1,1}), & \dots, & \varphi^{n-2}(x_{n-1,a(n-1)}), & \dots\dots & & x_{1,1}, \dots, x_{1,a(1)}.
\end{array}$$

Wenn wir diese Basis nun so ordnen, dass $B =$

$$\begin{aligned}
B = \big(&\varphi^{n-1}(x_{n,1}), \dots, \varphi(x_{n,1}), x_{n,1},\\
&\dots,\\
&\varphi^{n-1}(x_{n,a(n)}), \dots, \varphi(x_{n,a(n)}), x_{n,a(n)},\\
&\varphi^{n-2}(x_{n-1,1}), \dots, \varphi(x_{n-1,1}), x_{n-1,1},\\
&\dots,\\
&\varphi^{n-2}(x_{n-1,a(n-1)}), \dots, \varphi(x_{n-1,a(n-1)}), x_{n-1,a(n-1)},\\
&\dots,\\
&x_{1,1},\\
&\dots,\\
&x_{1,a(1)}\big),
\end{aligned}$$

so gilt

$$S_\varphi(B,B) = \underbrace{J(0,n)\oplus\cdots\oplus J(0,n)}_{a(n)} \oplus \underbrace{J(0,n-1)\oplus\cdots\oplus J(0,n-1)}_{a(n-1)} \oplus\cdots\oplus \underbrace{J(0,1)\oplus\cdots\oplus J(0,1)}_{a(1)}.$$

Somit hat $S_\varphi(B,B)$ die gewünschte Form. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 16.27.

(1) Sei φ ein Endomorphismus von $V \to V$, und sei B eine Basis von V mit $S_\varphi(B,B) = J(0,n)$. Berechnen Sie für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $\ker(\varphi^i)$, und die Dimension von $\ker(\varphi^i)$.

(2) Seien $m_1,\dots,m_d \in \mathbb{N}$, sei $n := \sum_{i=1}^d m_i$, und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) := (J(0,m_1) \oplus \cdots \oplus J(0,m_d)) \cdot x$. Berechnen Sie $\dim(\ker(\varphi))$, und für alle $i \in \mathbb{N}$ die Dimension von $\ker(\varphi^i)$. Verwenden Sie zum Ausdrücken des Ergebnisses die Zahl $a(k) := |\{j \in \{1,\dots,d\} \mid m_d = k\}|$. Die Zahl $a(k)$ gibt also die Anzahl der Jordankästchen der Dimension k an.

(3) (Mathematica) Sei $A = \begin{pmatrix} 18 & -22 & 1 & -11 \\ 18 & -22 & 1 & -11 \\ 8 & -9 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $N(A^3)$, $N(A^2)$, $N(A)$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B_3 von $N(A^3)$ modulo $N(A^2)$.

(c) Vervollständigen Sie $\{A \cdot v \mid v \in B_3\}$ zu einer Basis B_2 von $N(A^2)$ modulo $N(A)$.

(d) Vervollständigen Sie $\{A \cdot w \mid w \in B_2\}$ zu einer Basis B_1 von $N(A)$.

(e) Ordnen Sie die Vektoren in $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ passend zu einer Basis B an, sodass $S_{h_A}(B,B)$ eine $\oplus$-Summe von Jordankästchen ist.

(4) (Mathematica) Sei $A = \begin{pmatrix} 73 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 10 \\ -34 & -2 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 1221 & -9 & 3 & 0 & 0 & -6 & 53 & 172 \\ -1252 & 10 & -1 & 0 & 1 & 5 & -54 & -176 \\ 363 & -3 & 1 & 0 & 0 & -2 & 14 & 50 \\ 1355 & -11 & 3 & 0 & 0 & -6 & 58 & 190 \\ 292 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 40 \\ -584 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & -80 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^8$, sodass $S_{h_A}(B,B)$ die Summe von Jordankästchen ist. *Hinweis:* $A^3 = 0$.

5. Die Jordansche Normalform

DEFINITION 16.28. Sei J eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. J ist in *Jordanscher Normalform*, wenn es $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in K$ (nicht notwendigerweise verschieden) und $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$J = J(\alpha_1, m_1) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_k, m_k).$$

SATZ 16.29 (Existenz einer ähnlichen Matrix in Jordanscher Normalform). *Sei A eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Wir nehmen an, dass das charakteristische Polynom von A über K in lauter Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine Matrix $J \in K^{n\times n}$ in Jordanscher Normalform und eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(n,K)$, sodass $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$.*

Beweis: Sei $c_A = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)^{e_i}$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ paarweise verschieden. Wegen Satz 16.19 ist K^n die direkte Summe der Haupträume $U_1,\dots,U_r$ von A.

Wir finden nun für jeden Hauptraum U_i eine Basis B_i, sodass für $\varphi := h_A|_{U_i}$ die Matrix $S_\varphi(B_i, B_i)$ eine $e_i \times e_i$-Matrix in Jordanscher Normalform ist. Sei dazu $\psi := \varphi - \lambda * \mathrm{id}_{U_i}$. Wegen Lemma 16.21 ist ψ nilpotent auf U_i. Also gibt es wegen Satz 16.26 eine Basis B_i von U_i, $d \in \mathbb{N}$ und $m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}$, sodass

$$S_\psi(B_i, B_i) = J(0, m_1) \oplus \cdots \oplus J(0, m_d).$$

Also gilt

$$S_\varphi(B_i, B_i) = J(\lambda_i, m_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_i, m_d).$$

Sei $J_i := S_\varphi(B_i, B_i)$.

Satz 15.35 erlaubt nun, die Basen $B_1, B_2, \ldots, B_r$ zu einer Basis B von K^n zusammenzuhängen. Dann gilt $S_{h_A}(B, B) = J_1 \oplus \cdots \oplus J_r$. Wenn wir in die Spalten der Matrix P die Vektoren aus B schreiben, so gilt $A = P \cdot S_{h_A}(B, B) \cdot P^{-1}$. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 16.30.

(1) Finden Sie eine zu $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform. Ist A diagonalisierbar?

(2) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n$ für $n \geq 1$. Für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ gilt also also $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Bestimmen Sie eine Matrix J in Jordanscher Normalform und eine Matrix B, sodass $B^{-1} \cdot A \cdot B = J$.
   (b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für J^n.
   (c) (Mathematica) Bestimmen Sie daraus einen Ausdruck für A^n.
   (d) (Mathematica) Bestimmen Sie einen Ausdruck für den ersten Eintrag von $A^{m-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also für x_m. (*Lösung:* $2^{m-4}\left(m^2 - 7m + 14\right)$.)

(3) Finden Sie eine zu $A = \begin{pmatrix} -30 & -24 & -29 & -1 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \\ 37 & 28 & 36 & 1 \\ -241 & -200 & -250 & -7 \end{pmatrix}$ ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform. ($c_A = (t - 3)(t - 2)(t + 4)^2$).

SATZ 16.31 (Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform). *Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l \in K$ (nicht notwendigerweise verschieden), und seien $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ so, dass die Matrizen A und B, die durch*

$$\begin{aligned} A &= J(\alpha_1, m_1) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_k, m_k), \\ B &= J(\beta_1, n_1) \oplus \cdots \oplus J(\beta_l, n_l) \end{aligned}$$

definiert sind, ähnlich sind. Dann gilt $k = l$, und es gibt eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, l\}$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt: $\alpha_i = \beta_{\pi(i)}$ und $m_i = n_{\pi(i)}$.

Beweis: Da A und B ähnlich sind, gibt es wegen Satz 14.5 einen Endomorphismus $\varphi : K^n \to K^n$ und Basen A', B' von K^n, sodass $A = S_\varphi(A', A')$ und $B = S_\varphi(B', B')$. Sei $F := S_\varphi(E, E)$.

Sei c_F das charakteristische Polynom von F. Es gilt $c_F = c_A = c_B$, also

$$\prod_{i=1}^{k}(t-\alpha_i)^{m_i} = \prod_{j=1}^{l}(t-\beta_j)^{n_j}.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte der Matrix F. Es gilt dann wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung des Polynoms c_F (Satz 13.32) für jedes $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$:

$$\sum_{\substack{i=1\\ \alpha_i=\lambda}}^{k} m_i = \sum_{\substack{j=1\\ \beta_j=\lambda}}^{k} n_j = e,$$

wobei e die algebraische Vielfachheit von λ in F ist. Wir werden nun eine Bijektion $\pi_\lambda : \{i \in \{1, \dots, k\} \,|\, \alpha_i = \lambda\} \to \{j \in \{1, \dots, l\} \,|\, \beta_j = \lambda\}$ finden. Sei dazu $\{i_1, \dots, i_s\} := \{i \in \{1, \dots, k\} \,|\, \alpha_i = \lambda\}$, und $\{j_1, \dots, j_t\} := \{j \in \{1, \dots, l\} \,|\, \beta_j = \lambda\}$.

Sei U der Hauptraum von F zu λ. Durch Auswahl einer passenden Teilfolge der Basis A' von K^n erhalten wir eine Basis A'' von U, sodass

$$S_{\varphi|_U}(A'', A'') = J(\lambda, m_{i_1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda, m_{i_s}).$$

Ebenso erhalten wir durch Auswahl einer passenden Teilfolge von B' eine Basis B'' von U, sodass

$$S_{\varphi|_U}(B'', B'') = J(\lambda, n_{j_1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda, m_{j_t}).$$

Für $u \in \mathbb{N}$ sei $a(u)$ die Anzahl der $v \in \{1, \dots, s\}$ mit $m_{i_v} = u$. Genauso sei $b(u)$ die Anzahl der $v \in \{1, \dots, t\}$ mit $n_{j_v} = u$.

Wir berechnen nun für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Dimension von $\ker((\varphi|_U - \lambda * \mathrm{id}_U)^i)$. Sei $\psi := \varphi|_U - \lambda * \mathrm{id}_U$. Es gilt

$$\dim(\ker(\psi^i)) = \sum_{j=1}^{i} j \cdot a(j) + \sum_{j=i+1}^{n} i \cdot a(j).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\dim(\ker(\psi^i)) - \dim(\ker(\psi^{i-1})) &= \sum_{j=1}^{i} j \cdot a(j) + \sum_{j=i+1}^{n} i \cdot a(j) - \sum_{j=1}^{i-1} j \cdot a(j) - \sum_{j=i}^{n}(i-1) \cdot a(j)\\ &= \sum_{j=i}^{n} a(j).\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\Big(\dim(\ker(\psi^i)) - \dim(\ker(\psi^{i-1}))\Big) - \Big(\dim(\ker(\psi^{i+1})) - \dim(\ker(\psi^i))\Big) = a(i).$$

Genauso gilt aber auch $b(i) = \Big(\dim(\ker(\psi^i)) - \dim(\ker(\psi^{i-1}))\Big) - \Big(\dim(\ker(\psi^{i+1})) - \dim(\ker(\psi^i))\Big)$. Insgesamt gilt also $a(i) = b(i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Somit sind die

Folgen $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_s})$ und $(n_{j_1}, \ldots, n_{j_t})$ bis auf die Reihenfolge gleich. Daraus erhalten wir die Bijektion π_λ.

Durch Vereinigen der π_λ erhalten wir schließlich π. ■