KAPITEL 15

Homomorphismen zwischen Vektorräumen

1. Der Rang einer Matrix

Wir erinnern uns, dass der Rang einer Matrix A, $\mathrm{rk}(A)$, als die Dimension des Zeilenraums $Z(A)$ von A definiert ist.

SATZ 15.1. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt* $\dim(Z(A)) = \dim(S(A))$.

Beweis: Sei r die Dimension des Spaltenraums von A, und seien $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spalten von A. Dann gibt es wegen Übungsbeispiel 6.51(2) $i_1 < i_2 < \cdots < i_r \in \{1, \dots, n\}$, sodass $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ eine Basis von $S(A)$ ist. Sei

$$B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_r} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

eine Matrix, in deren Spalten die Vektoren dieser Basis stehen. B ist eine $m\times r$-Matrix. Da sich jede Spalte von A als Linearkombination von $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ ausdrücken lässt, gibt es eine Matrix $C \in K^{r\times n}$, sodass

$$A = B \cdot C. \tag{15.1}$$

Aus der Gleichung (15.1) sieht man, dass jede Zeile von A eine Linearkombination der Zeilen von C ist. Also liegt jede Zeile von A im Zeilenraum $Z(C)$ von C. Da C genau r Zeilen hat, gilt $\dim(Z(C)) \le r$, und somit $\dim(Z(A)) \le r$. Insgesamt gilt also für die Matrix A, dass $\dim(Z(A)) \le \dim(S(A))$.

Wir haben also bewiesen, dass für jede Matrix die Dimension des Zeilenraums höchstens so groß wie die Dimension des Spaltenraums ist. Es gilt also auch $\dim(Z(A^T)) \le \dim(S(A^T))$, und somit $\dim(S(A)) \le \dim(Z(A))$. ■

KOROLLAR 15.2. *Sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei $r \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $r \le \mathrm{rk}(A)$.
(2) *Es gibt $i_1 < \cdots < i_r \in \{1, \dots, m\}$ und $j_1 < \cdots < j_r \in \{1, \dots, n\}$, sodass die $r \times r$-Matrix B, die durch*

$$B(l, k) := A(i_l, j_k)$$

definiert ist, regulär ist.

Beweis: (1)⇒(2): Seien die $i_1, \dots, i_r$-te Zeile von A linear unabhängig, und sei C die $r \times n$-Matrix, die nur aus diesen Zeilen besteht. Die Matrix C hat den Rang r, daher besitzt sie r linear unabhängige Spalten; die Indizes dieser Spalten liefern $j_1, \dots, j_r$. (2)⇒(1): Wenn B regulär ist, so sind die $i_1, \dots, i_r$-te Zeile von A linear unabhängig, also gilt $\mathrm{rk}(A) \geq r$. ■

2. Homomorphismen zwischen Vektorräumen

DEFINITION 15.3. Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, und sei $h : U \to V$.

(1) h ist genau dann ein *Homomorphismus* (genauer: *K-Vektorraum-Homomorphismus*) von U nach V, wenn h eine lineare Abbildung von U nach V ist, also wenn $h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2)$ und $h(\alpha * u) = \alpha * h(u)$ für alle $u, u_1, u_2 \in U$, $\alpha \in K$ gilt.
(2) h ist genau dann ein *Monomorphismus*, wenn h ein injektiver Homomorphismus ist.
(3) h ist genau dann ein *Epimorphismus*, wenn h ein surjektiver Homomorphismus ist.
(4) h ist genau dann ein *Isomorphismus*, wenn h ein bijektiver Homomorphismus ist.
(5) h ist genau dann ein *Endomorphismus*, wenn h ein Homomorphismus und $U = V$ ist.
(6) h ist genau dann ein *Automorphismus*, wenn h ein Isomorphismus und $U = V$ ist.

DEFINITION 15.4. Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, und sei $h : U \to V$ ein Homomorphismus. Dann definieren wir den *Kern von h* durch

$$\ker(h) := \{u \in U \mid h(u) = 0\}.$$

Wir definieren das *Bild von h* oder *Image von h* durch

$$\mathrm{im}(h) := \{h(u) \mid u \in U\}.$$

LEMMA 15.5. *Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, und sei $h : U \to V$ ein Homomorphismus. Dann ist der Kern von h ein Unterraum von U, und das Image von h ein Unterraum von V.*

SATZ 15.6. *Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, und sei $h : U \to V$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*

(1) *h ist genau dann injektiv, wenn* $\ker(h) = \{0\}$.
(2) *h ist genau dann surjektiv, wenn* $\mathrm{im}(h) = V$.

SATZ 15.7. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K, sei $h_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$, und sei $N(A)$ der Nullraum von A. Dann gilt*

(1) $\ker(h_A) = N(A)$.

(2) $\mathrm{im}(h_A) = S(A)$.
(3) *Der Rang von A ist die Dimension von* $\mathrm{im}(h_A)$.

SATZ 15.8. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K, sei $h_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$ Dann sind äquivalent:*

(1) *h_A ist injektiv.*
(2) $\dim(N(A)) = 0$
(3) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

SATZ 15.9. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K, sei $h_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$ Dann sind äquivalent:*

(1) *h_A ist surjektiv.*
(2) $\mathrm{rk}(A) = m$.
(3) *Die Zeilen von A sind linear unabhängig.*

ÜBUNGSAUFGABEN 15.10.
Beachten Sie in den folgenden Übungsbeispiel, ob wir die Basis eines Vektorraums als Menge (wie etwa in Kapitel 11 und in Lemma 11.7) oder als Folge (wie etwa in Definition 6.18) ansehen.

(1) Seien U, V Vektorräume, h ein Homomorphismus von U nach V, und sei B eine Teilmenge von U. Zeigen Sie, dass die lineare Hülle des Bildes von B gleich dem Bild der linearen Hülle von B ist, also dass $L(h[B]) = h[L(B)]$.
(2) Seien U, V Vektorräume, h ein Monomorphismus von U nach V, und sei B eine linear unabhängige Teilmenge von U. Zeigen Sie, dass auch das Bild $h[B]$ linear unabhängig ist.
(3) Seien U, V Vektorräume, h ein Isomorphismus von U nach V, und sei B eine Basis von U. Zeigen Sie, dass auch das Bild $h[B]$ eine Basis von V ist.
(4) Seien U, V Vektorräume, h ein Homomorphismus von U nach V, und seien $u_1, \ldots, u_n \in U$ so, dass $(u_1, \ldots, u_n)$ linear abhängig ist. Zeigen Sie, dass $(h(u_1), \ldots, h(u_n))$ linear abhängig ist.

SATZ 15.11. *Sei $(b_1, \ldots, b_l)$ eine linear unabhängige Folge von Vektoren im K^n, und sei $(y_1, \ldots, y_l)$ eine Folge von Vektoren im K^m. Dann gibt es einen Homomorphismus $h : K^n \to K^m$, sodass $h(b_i) = y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis: Wir bilden eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_l, b_{l+1}, \ldots, b_n)$ von K^n. Dann definieren wir eine lineare Abbildung h durch

$$h(v) := A \cdot (v)_B,$$

wobei A die $m \times n$-Matrix ist, in deren Spalten die Vektoren $(y_1, \ldots, y_l, 0, \ldots, 0)$ stehen. Wegen Satz 9.10 ist h eine lineare Abbildung, und sie bildet die die Vektoren $(b_1, \ldots, b_l)$ auf die gewünschten Werte ab.

Es gilt dann $S_h(B, E) = A$, und wir erhalten $S_h(E, E)$ durch

$$S_h(E, E) = S_h(B, E) \cdot {}_BT_E = A \cdot P^{-1},$$

wobei P die Matrix mit den Vektoren $(b_1, \ldots, b_n)$ in den Spalten ist. ∎

Wie in Kapitel 11 sehen wir nun eine Basis von U als eine Teilmenge von U (und nicht als Folge von Vektoren aus U) an.

SATZ 15.12. *Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, sei B eine Basis von U, und sei f eine Funktion von B nach V. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $h : U \to V$, sodass $h(b) = f(b)$ für alle $b \in B$.*

Beweis: Wir definieren die Relation h durch

$$h := \Big\{\big(\sum_{b\in T} \lambda(b) * b, \sum_{b\in T} \lambda(b) * f(b)\big) \,|\, T \text{ ist eine endliche Teilmenge von } B, \lambda : T \to K\Big\}.$$

Dann ist h funktional, ein Homomorphismus, und $h|_B = f$. Wir zeigen als erstes, dass h eine Funktion ist. Seien dazu T_1, T_2 endliche Teilmengen von B, und sei $\lambda : T_1 \to K$, $\mu : T_2 \to K$ so, dass

$$\sum_{b\in T_1} \lambda(b) * b = \sum_{b\in T_2} \mu(b) * b.$$

Wir bilden nun eine Abbildung $\lambda_1 : T_1 \cup T_2 \to K$ durch $\lambda_1(t) := \lambda(t)$ für $t \in T_1$ und $\lambda_1(t) := 0$ für $t \in T_2 \setminus T_1$. Genauso erweitern wir μ und bilden eine Abbildung $\mu_1 : T_1 \cup T_2 \to K$ durch $\mu_1(t) := \mu(t)$ für $t \in T_2$ und $\mu_1(t) := 0$ für $t \in T_1 \setminus T_2$. Dann gilt

$$\sum_{b\in T_1\cup T_2} \lambda_1(b) * b = \sum_{b\in T_1\cup T_2} \mu_1(b) * b.$$

Also gilt $\sum_{b\in T_1\cup T_2}(\lambda_1(b) - \mu_1(b)) * b = 0$, und folglich wegen der linearen Unabhängigkeit von B auch $\lambda_1 = \mu_1$. Also gilt

$$\sum_{b\in T_1} \lambda(b) * f(b) = \sum_{b\in T_2} \mu(b) * f(b).$$

Die Relation h ist also funktional.

Wir zeigen nun die Homomorphismuseigenschaften. Es gilt

$$\begin{aligned} h(\sum_{b\in T_1} \lambda(b) * b + \sum_{b\in T_2} \mu(b) * b) &= h(\sum_{b\in T_1\cup T_2} (\lambda_1(b) + \mu_1(b)) * b) \\ &= \sum_{b\in T_1\cup T_2} (\lambda_1(b) + \mu_1(b)) * f(b) \\ &= \sum_{b\in T_1} \lambda(b) * f(b) + \sum_{b\in T_2} \mu(b) * f(b) \\ &= h(\sum_{b\in T_1} \lambda(b) * b) + h(\sum_{b\in T_2} \mu(b) * b). \end{aligned}$$

Dabei sind λ_1, μ_1 wieder die Erweiterungen von λ und μ wie oben. Die Eigenschaft $h(\alpha * v) = \alpha * h(v)$ zeigt man genauso.

Sei nun $b \in B$. Dann gilt $h(b) = h(1 * b) = 1 * f(b) = f(b)$, also gilt $h|_B = f$. ■

KOROLLAR 15.13. *Es gibt eine Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $h(x + y) = h(x) + h(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $h(1) = 1$ erfüllt, und die nicht gleich der identischen Abbildung auf $\mathbb{R}$ ist.*

Beweis: Wir sehen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit der Vektorraummultiplikation $*$: $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q * r := qr$ an. Wir erweitern $\{1\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. (Diese Basis erhält man, indem man mithilfe des Zornschen Lemmas, wie im Beweis von Satz 11.8, eine maximale linear unabhängige Teilmenge B von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $1 \in B$ auswählt.) Nun definieren wir $f : B \to \mathbb{R}$ durch $f(1) := 1$ und $f(b) := 0$ für $b \in B \setminus \{1\}$. Wir können nun f zu einem Homomorphismus h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ erweitern. Diese Abbildung h ist nicht die identische Abbildung. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 15.14.

(1) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die $h(x + y) = h(x) + h(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $h(x) = h(1) \cdot x$.
(2) * Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die $h(x + y) = h(x) + h(y)$ und $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass h entweder die Nullabbildung oder die identische Abbildung ist.

SATZ 15.15. *Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, und sei $h : U \to V$ ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung h^{-1} ebenfalls eine lineare Abbildung, und somit ein Isomorphismus von V nach U.*

Beweisskizze: Wir zeigen nur, dass h^{-1} additiv ist: Seien $a, b \in V$, und sei $x := h^{-1}(a)$, $y := h^{-1}(b)$. Dann gilt $h(x + y) = h(x) + h(y) = a + b$, also $h^{-1}(a + b) = x + y = h^{-1}(a) + h^{-1}(b)$.

DEFINITION 15.16. Seien U, V Vektorräume über dem Körper K. Die Vektorräume U, V sind genau dann *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $h : U \to V$ gibt.

SATZ 15.17. *Seien U, V Vektorräume über dem Körper K, sei B eine Basis von U, und sei C eine Basis von von V. Dann sind U und V genau dann isomorph, wenn B und C gleichmächtig sind.*

Beweisskizze: Übung 15.10(3) und Satz 11.29. ■

3. Faktorräume

DEFINITION 15.18. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V, und sei $w \in V$. Dann definieren wir

$$w + U := \{w + u \mid u \in U\}$$

und

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}.$$

DEFINITION 15.19. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V. Dann definieren wir $\oplus$ und $*$ durch

$$(v + U) \oplus (w + U) := (v + w) + U$$

und

$$\alpha * (v + U) := (\alpha v) + U$$

für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$.

Wir überlegen uns, dass $\oplus$ und $*$ wohldefiniert sind, das heißt, dass die Relation $\{\big((v+U, w+U), (v+w)+U\big) \mid v, w \in V\}$, die ja eine Teilmenge von $(V/U \times V/U) \times V/U$ ist, eine Funktion von $V/U \times V/U$ nach V/U ist.

DEFINITION 15.20. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Unterraum von V. Dann ist $\langle V/U, \oplus, \ominus, 0+U, *\rangle$ ein Vektorraum über K.

ÜBUNGSAUFGABEN 15.21.
In den folgenden Beispielen ist V stets ein Vektorraum, und U ein Unterraum von V.

(1) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim_U$, die durch $v \sim_U w :\Leftrightarrow v - w \in U$ definiert ist, eine Äquivalenzrelation auf V ist.
(2) Zeigen Sie, dass für die im Beispiel 1 definierte Relation $\sim_U$ und für jedes $v \in V$ gilt: $v/{\sim_U} = v + U$.
(3) Zeigen Sie, dass für die im Beispiel 1 definierte Relation $\sim_U$ gilt: V/U ist gleich der Faktormenge $V/{\sim_U}$.

SATZ 15.22. *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ und $u_1, \ldots, u_n$ in U so, dass $(v_1+U, v_2+U, \ldots, v_m+U)$ eine Basis von V/U ist und $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U ist. Dann ist $B = (v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von V.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $V \subseteq L(B)$. Sei dazu $w \in V$. Wegen $w + U \in V/U$ gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, sodass
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i * (v_i + U) = w + U.$$
Also gilt
$$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i) + U = w + U.$$
Es gibt also ein $u \in U$, sodass
$$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i) + u = w + 0.$$
Da $u \in U$, gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$, sodass $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$. Also gilt
$$w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i,$$
und daher $w \in L(B)$.

Um zu zeigen, dass B linear unabhängig ist, wählen wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ so, dass
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0.$$
Dann gilt
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \in U,$$

also

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i * (v_i + U) = 0 + U.$$

Da $(v_1 + U, \ldots, v_m + U)$ eine Basis von V/U sind, gilt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Also gilt $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$, und daher sind wegen der linearen Unabhängigkeit von $(u_1, \ldots, u_n)$ auch alle β_i gleich 0. ■

KOROLLAR 15.23. *Sei V ein Vektorraum über K, und sei U ein endlichdimensionaler Unterraum von V, sodass V/U ebenfalls wieder endlichdimensional ist. Dann ist V endlichdimensional, und es gilt*

$$\dim(V) = \dim(V/U) + \dim U.$$

Dieser Satz gilt auch für unendlichdimensionale Vektorräume. Allerdings müssen wir dazu erst erklären, wie für unendlichdimensionale Vektorräume Gleichungen der Form $\dim(U) + \dim(V) = \dim(W)$ zu lesen sind. Zunächst müssen wir $\dim(U)$ definieren, wenn U keine endliche Basis besitzt. Wir definieren $\dim(U)$ dann als die “Kardinalität” (Mächtigkeit) einer Basis von U. Wegen Satz 11.29 sind alle Basen von U gleichmächtig. Allerdings fehlen uns noch die Objekte, diese Mächtigkeiten, also etwa $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, … zu beschreiben. Dazu kann man *Kardinalzahlen* einführen, die man dann auch wirklich addieren kann (siehe [**Halmos, 1976**]).

Eine formal weniger aufwändige Sichtweise, der Gleichung $\dim(U)+\dim(V) = \dim(W)$ eine definierte Bedeutung zu geben, ist, diese Gleichung als eine Abkürzung für folgende Behauptung zu sehen:

> Es gibt Basen B von U, C von V und D von W, sodass D gleichmächtig zu $(B \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$ ist.

SATZ 15.24. *Sei V ein K-Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Wenn U eine Basis B und V/U eine Basis C hat, so hat V eine Basis, die gleichmächtig zu* $(B\times\{0\}) \cup (C \times \{1\})$ *ist; es gilt also* $\dim(U) + \dim(V/U) = \dim(V)$.

4. Der Homomorphiesatz

SATZ 15.25 (Homomorphiesatz). *Seien V und W Vektorräume, und sei h eine lineare Abbildung von V nach W. Sei $U := \ker(h)$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{cccc} H : & V/U & \longrightarrow & W \\ & v + U & \longmapsto & h(v) \end{array}$$

wohldefiniert. Die Abbildung H ist außerdem ein Isomorphismus von V/U nach $\mathrm{im}(h)$.

Anstelle “Dann ist die Abbildung [...] wohldefiniert” kann man sagen: “Dann ist die Relation $H = \{(v + U, h(v)) \mid v \in V\}$ eine Funktion von V/U nach W.”

KOROLLAR 15.26. *Seien V, W Vektorräume über K (nicht notwendigerweise endlichdimensional), und sei h eine lineare Abbildung von V nach W. Dann gilt*

$$\dim(\mathrm{im}(h)) + \dim(\ker(h)) = \dim(V).$$

Beweis: Sei $U := \ker(h)$. Wegen Satz 15.24 gilt

$$\dim(V/U) + \dim(U) = \dim(V).$$

Da $V/\ker(h)$ isomorph zu $\mathrm{im}(h)$ ist, gilt also

$$\dim(\mathrm{im}(h)) + \dim(\ker(h)) = \dim(V).$$

SATZ 15.27 (Rangsatz). *Sei A eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gilt* $\dim(N(A)) = n - \mathrm{rk}(A)$.

Beweis: Wir betrachten $h_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$. Dann gilt $\ker(h_A) = N(A)$, und $\dim(\mathrm{im}(h_A)) = \dim(S(A)) = \mathrm{rk}(A)$. Da $K^n/\ker(h_A)$ isomorph zu $\mathrm{im}(h_A)$ ist, sind die Dimensionen gleich. Es gilt also $n - \dim(N(A)) = \mathrm{rk}(A)$. ■

SATZ 15.28 (Erster Isomorphiesatz). *Seien U, V beide Unterräume des Vektorraums W. Dann sind die beiden Faktorräume $U/(U \cap V)$ und $(U + V)/V$ isomorph.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcccl} h & : & U & \longrightarrow & (U+V)/V \\ & & u & \longmapsto & u+V. \end{array}$$

Die Abbildung h ist surjektiv auf $(U + V)/V$, und es gilt $\ker(h) = U \cap V$. Somit gilt nach dem Homomorphiesatz (Satz 15.25), dass $U/\ker(h)$ isomorph zu $(U + V)/V$ ist. ■

KOROLLAR 15.29. *Seien U, V beide endlichdimensionale Unterräume des Vektorraums W. Dann gilt* $\dim(U + V) = \dim(U) + dim(V) - \dim(U \cap V)$.

Für unendlichdimensionale Unterräume kann man diesen Satz als $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim(U)+\dim(V)$ formulieren, und beweisen, indem man eine Basis B von $U \cap V$ zu einer Basis C von U und einer Basis D von V erweitert, und beobachtet, dass $C \cup D$ eine Basis von $U + V$ ist, und $|C \cup D| + |C \cap D| = |C| + |D|$ gilt.

LEMMA 15.30. *Seien V, W Vektorräume, sei h ein Epimorphismus von V nach W, und sei U ein Unterraum von W. Dann gilt*

$$\dim(\{x \in V \mid h(x) \in U\}) = \dim(U) + \dim(\ker(h)).$$

Beweis: Wir wählen eine Basis B von U. Dann wählen wir aus jedem $h^{-1}[\{b\}]$ genau ein Element aus, und wir fassen diese Elemente in einer Menge A zusammen. Die Einschränkung $h|_A$ ist also injektiv, und $h[A]$ ist eine Basis von U. Dann ist $\ker(h) \cup A$ linear unabhängig und eine Basis von $\{x \in V \mid h(x) \in U\}$.

Wenn V endlichdimensional ist, kann man Lemma 15.30 auch mit dem Homomorphiesatz zeigen: Sei $\varphi : V \to W/U$, $\varphi(v) = h(v) + U$. Dann gilt $\ker(\varphi) = \{x \in V \mid h(x) \in U\}$. Also gilt

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = \dim(V) = \dim(\ker(h)) + \dim(\operatorname{im}(h)),$$

und somit

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(W) - \dim(U) = \dim(\ker(h)) + \dim(W),$$

woraus $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(\ker(h)) + \dim(U)$ folgt. ■

SATZ 15.31. *Sei A eine $k \times l$-Matrix, und B eine $l \times m$-Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Dann gilt:*

(1) $\operatorname{rk}(A \cdot B) \leq \min(\operatorname{rk}(A), \operatorname{rk}(B))$.
(2) *(Sylvesters Rangungleichung)* $\operatorname{rk}(A \cdot B) \geq \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B) - l$.
(3) $\operatorname{rk}(A + B) \leq \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$.
(4) $\operatorname{rk}(A + B) \geq \operatorname{rk}(A) - \operatorname{rk}(B)$.

Beweis: (1) Es gilt $\operatorname{rk}(A \cdot B) = \dim(\operatorname{im}(h_{A \cdot B})) = \dim(\operatorname{im}(h_A \circ h_B))$. Nun gilt $\operatorname{im}(h_A \circ h_B) \subseteq \operatorname{im}(h_A)$, also $\dim(\operatorname{im}(h_A \circ h_B)) \leq \operatorname{rk}(A)$.

Weiters gilt für jeden Homomorphismus φ und für jeden Vektorraum X, dass $\dim(\varphi[X]) \leq \dim(X)$. (Das gilt etwa, weil $\dim(\varphi[X]) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(X)$.) Also gilt $\dim(\operatorname{im}(h_A \circ h_B)) = \dim(h_A[\operatorname{im}(h_B)]) \leq \dim(\operatorname{im}(h_B)) = \operatorname{rk}(B)$.

(2)

$$\begin{aligned}
\dim(\operatorname{im}(h_A \circ h_B)) &= m - \dim(\ker(h_A \circ h_B)) \\
&= m - \dim(\{x \in K^m \mid h_B(x) \in \ker(h_A)\}) \\
&= m - \dim(\{x \in K^m \mid h_B(x) \in \ker(h_A) \cap S(B)\}) \\
&= m - \big(\dim(\ker(h_B)) + \dim(\ker(h_A) \cap S(B))\big) \\
&\geq m - \dim(\ker(h_B)) - \dim(\ker(h_A)) \\
&= m - (m - \dim(\operatorname{im}(h_B))) - (l - \dim(\operatorname{im}(h_A))) \\
&= \operatorname{rk}(B) + \operatorname{rk}(A) - l.
\end{aligned}$$

(3) Wegen $\operatorname{im}(h_{A+B}) \subseteq \operatorname{im}(h_A) + \operatorname{im}(h_B)$ gilt $\dim(\operatorname{im}(h_{A+B})) \leq \dim(\operatorname{im}(h_A) + \operatorname{im}(h_B)) \leq \dim(\operatorname{im}(h_A)) + \dim(\operatorname{im}(h_B)) = \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$. (4) $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}((A + B) + (-B)) \leq \operatorname{rk}(A + B) + \operatorname{rk}(-B) = \operatorname{rk}(A + B) + \operatorname{rk}(B)$, also $\operatorname{rk}(A + B) \geq \operatorname{rk}(A) - \operatorname{rk}(B)$. ■

5. Zerlegung von Vektorräumen in direkte Summen

DEFINITION 15.32. Wir definieren die Summe der Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ des Vektorraums V durch

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n := \Big\{\sum_{i=1}^{n} u_i \mid u_i \in U_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\Big\}.$$

Besonders interessant ist eine solche Zerlegung, wenn sich jedes Element der Summe eindeutig in Komponenten, die in den einzelnen U_i liegen, zerlegen lässt.

DEFINITION 15.33. Seien $U_1, \dots, U_n$ Unterräume des Vektorraums V. Der Unterraum U ist genau dann die *direkte Summe* von $U_1, \dots, U_n$, wenn

(1) $U = U_1 + \cdots + U_n$,
(2) für jedes $u \in U$ gibt es genau ein $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$, sodass $u = u_1 + \cdots + u_n$.

Wenn U die direkte Summe von $U_1, \dots, U_n$ ist, so schreiben wir $U = U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_n$.

SATZ 15.34. *Seien $U_1, \dots, U_n$ Unterräume des Vektorraums V, und sei $U := U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Dann sind äquivalent:*

(1) *Für jedes $u \in U$ gibt es genau ein $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$, sodass $u = u_1 + \cdots + u_n$.*
(2) *Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt*
$$U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}.$$

SATZ 15.35. *Sei $U = U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_n$, und sei für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge B_i eine Basis für U_i. Dann ist $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ eine Basis für U.*

Folglich ist die Dimension einer direkten Summe gleich der Summe der Dimensionen der Summanden.