

SATZ 14.21. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist über K diagonalisierbar.
- (2) c_A zerfällt über K in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.

4. Abschätzungen für die Eigenwerte

DEFINITION 14.22. Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir den Betrag von z durch

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Es gilt also $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)}$.

LEMMA 14.23. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

SATZ 14.24 (Gerschgorin, 1931). Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A . Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass

$$|\lambda - A(i, i)| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |A(i, j)|$$

Dieser Satz liefert auch eine Abschätzung für den Betrag der Nullstellen eines Polynoms. Dazu brauchen wir folgenden Begriff.

DEFINITION 14.25. Sei K ein Körper, und sei $f = f_0 + f_1 t + \dots + f_{n-1} t^{n-1} + t^n$ ein normiertes Polynom vom Grad n in $K[t]$. Dann ist die Matrix

$$B(f) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -f_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}$$

die Begleitmatrix von f .

SATZ 14.26. Sei K ein Körper, und sei $f \in K[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad n . Dann ist das charakteristische Polynom der $n \times n$ -Matrix $B(f)$ gleich f ; es gilt also $c_{B(f)} = f$.

KOROLLAR 14.27. Sei $f \in \mathbb{C}[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad n , und sei $x \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f . Dann gilt:

- (1) $|x| \leq \max(|f_0|, 1 + |f_1|, \dots, 1 + |f_{n-1}|)$.
- (2) $|x| \leq \max(1, \sum_{j=0}^{n-1} |f_j|)$.

5. Beweis des Hauptsatzes der Algebra

In diesem Kapitel geben wir einen Beweis dafür an, dass jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) > 1$ eine Nullstelle $x \in \mathbb{C}$ besitzt. Dazu brauchen wir drei Lemmata aus der Analysis.

LEMMA 14.28. Sei $f = f_0 + \dots + f_{n-1}t^{n-1} + t^n \in \mathbb{C}[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, sei $M \in \mathbb{R}$ mit $M > 0$, und sei $x \in \mathbb{C}$. Wenn $|x| > 1$ und

$$|x| > \sum_{i=0}^{n-1} |f_i| + M,$$

so gilt $|f^{\mathbb{C}}(x)| > M$.

LEMMA 14.29 (Formel von de Moivre (1667-1754)). Sei $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, sodass

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r * \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$z^n = r^n * \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$$

KOROLLAR 14.30. Sei $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gibt ein $x \in \mathbb{C}$ mit $x^n = z$.

LEMMA 14.31 (Satz vom Minimum). Sei f eine stetige Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} , sei $R \in \mathbb{R}$, und sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq R\}$. Dann gibt es ein $(x_0, y_0) \in K$, sodass für alle $(x, y) \in K$ gilt: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Beweis des Hauptsatzes der Algebra (Satz 13.41): Sei $f = f_0 + f_1t + \dots + f_{n-1}t^{n-1} + t^n$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) > 0$, und sei $n := \deg(f)$. Wir werden zeigen, dass f eine Nullstelle besitzt.

Seien $R \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} R &:= \left(\sum_{i=0}^{n-1} |f_i|\right) + 3|f_0| + 2, \\ Q &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |f^{\mathbb{C}}(x + iy)|, \\ K &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 14.31 nimmt Q auf der Menge K ein Minimum an; sei (x_0, y_0) eine Stelle, an der Q auf K minimal ist. Es gilt nun

$$Q(0, 0) = |f^{\mathbb{C}}(0)| = |f_0|.$$

Wenn $x^2 + y^2 \geq R^2$, so gilt $|x + iy| \geq R > \max(1, (\sum_{i=0}^{n-1} |f_i|) + 2|f_0| + 1)$, und folglich wegen Lemma 14.28

$$Q(x, y) = |f^{\mathbb{C}}(x + iy)| > 2|f_0| + 1.$$

Also gilt $|x_0 + iy_0| < R$; die Stelle, an der Q sein Minimum auf K annimmt, liegt also im Inneren des Kreises K , und das Minimum von Q auf K ist sogar ein globales Minimum von Q auf \mathbb{R}^2 .

Sei nun $z_0 := x_0 + y_0 i$, und sei $g \in \mathbb{C}[t]$ definiert durch

$$g(t) := f(t + z_0).$$

Wir wissen nun, dass $(x, y) \mapsto |g^{\mathbb{C}}(x + y i)|$ an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum besitzt. Wir schreiben g als

$$g = b_0 + b_k t^k + b_{k+1} t^{k+1} \dots + t^n,$$

wobei $k := \min\{j \in \{1, \dots, n\} : b_j \neq 0\}$.

Wenn $b_0 = 0$, so gilt $g^{\mathbb{C}}(0) = 0$. Dann gilt $f^{\mathbb{C}}(z_0) = 0$, und somit hat f eine Nullstelle.

Wir betrachten nun den Fall, dass $b_0 \neq 0$. Sei nun $c \in \mathbb{C}$ so, dass

$$c^k = -b_0 \cdot \overline{b_k}.$$

Wir bilden nun $h \in \mathbb{C}[t]$ durch

$$h(t) := \frac{1}{b_0} g(c \cdot t).$$

Wir wissen, dass auch $(x, y) \mapsto |h^{\mathbb{C}}(x + y i)|$ an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum besitzt, und dass $h^{\mathbb{C}}(0) = 1$. Wir berechnen nun das Polynom h . Es gilt

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{b_0} \cdot (b_0 + b_k c^k t^k + \sum_{j=k+1}^n b_j c^j t^j) \\ &= 1 + \frac{b_k}{b_0} (-b_0 \overline{b_k}) t^k + \sum_{j=k+1}^n \frac{b_j c^j}{b_0} t^j. \end{aligned}$$

Seien h_0, h_1, \dots, h_n die Koeffizienten von h . Dann gilt $h_0 = 1$ und $h_1 = -b_k \overline{b_k}$. Also ist h_1 eine negative reelle Zahl. Sei $a := -h_1$, und sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und

$$\begin{aligned} |h^{\mathbb{C}}(z)| &= |1 - a z^k + \sum_{j=k+1}^n h_j z^j| \\ &\leq |1 - a z^k| + \sum_{j=k+1}^n |h_j| |z|^j \\ &= |1 - a z^k| + |z|^k \cdot |z| \cdot \sum_{j=k+1}^n |h_j| |z|^{j-(k+1)}. \end{aligned}$$

Wenn $|z| < 1$, so gilt

$$|h^{\mathbb{C}}(z)| \leq |1 - a z^k| + |z|^k \cdot |z| \cdot \sum_{j=k+1}^n |h_j|.$$

Wir nehmen nun an, dass z eine reelle Zahl mit $0 < z < 1$, $z < \frac{a}{2 \cdot \sum_{j=k+1}^n |h_j|}$ und $z < \sqrt[k]{a}$

ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |h^C(z)| &\leq |1 - a z^k| + |z|^k \cdot \frac{a}{2} \\ &= 1 - a z^k + z^k \cdot \frac{a}{2} \\ &= 1 - \frac{a}{2} z^k \\ &< 1. \end{aligned}$$

Daher nimmt $F(x, y) := |h(x + y i)|$ an der Stelle $(0, 0)$ kein lokales Minimum an, im Widerspruch zur Wahl von (x_0, y_0) als Minimum von Q . Der Fall $b_0 \neq 0$ kann also nicht eintreten. ■