Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
15. Übungsblatt für den 28. Juni 2010

Verwenden Sie, wenn erforderlich, für die Rechnungen in den folgenden Beispielen Mathematica.

1. Finden Sie eine zu $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform. Ist A diagonalisierbar?

2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n$ für $n \geq 1$. Für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ gilt also also $\left(\begin{smallmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{smallmatrix}\right) = A^n \cdot \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Bestimmen Sie eine Matrix J in Jordanscher Normalform und eine Matrix B, sodass $B^{-1} \cdot A \cdot B = J$.
   (b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für J^n.
   (c) Bestimmen Sie daraus einen Ausdruck für A^n.
   (d) Bestimmen Sie einen Ausdruck für den ersten Eintrag von $A^{m-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, also für x_m.

3. Finden Sie eine zu $A = \begin{pmatrix} -30 & -24 & -29 & -1 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \\ 37 & 28 & 36 & 1 \\ -241 & -200 & -250 & -7 \end{pmatrix}$ ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform. ($c_A = (t-3)(t-2)(t+4)^2$).

4. Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$, $\lambda \in K$, $p \in K[t]$. Zeigen Sie folgende Behauptungen:
   (a) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, so ist $p^K(\lambda)$ ein Eigenwert von $\hat{p}(A)$.
   (b) Wenn $\hat{p}(A) = 0$, so ist jeder Eigenwert von A eine Nullstelle von p.
   (c) Wenn p über K in Linearfaktoren zerfällt, $\deg(p) \geq 1$ und $\hat{p}(A) = 0$ ist, so besitzt A zumindest einen Eigenwert in K.

5. Sei $B = (b_1, b_2, b_3) = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{smallmatrix}\right))$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, seien E_1 und $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3$, und seien $B^\star = (b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star)$ und $E_3^\star = (e_1^\star, e_2^\star, e_3^\star)$ die dazugehörenden dualen Basen von $(\mathbb{R}^3)^\star$. Berechnen Sie folgende Matrizen und Vektoren:
   (a) $S_{b_1^\star}(B, E_1)$.
   (b) $S_{b_1^\star}(E_3, E_1)$.

(c) Die Basistransformationsmatrix ${}_{B^\star}T_{E_3^\star}$, also $S_{\mathrm{id}}(E_3^\star, B^\star)$.

(d) $(e_1^\star)_{E_3^\star}$, $(e_1^\star)_{B^\star}$.

6. Sei $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (\exists j \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N})(i > j \Rightarrow a_i = 0)\}$ der Vektorraum aller reellen Folgen mit endlich vielen Nichtnullern. Sei $e_i^\star : V \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a_i$. Finden Sie ein Element in $V^\star$, das nicht in der linearen Hülle der $\{e_i^\star \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ liegt.

7. Sei $A = \begin{pmatrix} 15 & -54 & 105 \\ -20 & 22 & -15 \\ 0 & 40 & 25 \end{pmatrix}$.

   (a) Seien a_1, a_2, a_3 die Spaltenvektoren von A. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (c_1, c_2, c_3) von $\mathbb{R}^3$, indem Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Folge (a_1, a_2, a_3) orthonormalisieren.

   (b) Sei Q die Matrix mit den Spaltenvektoren c_1, c_2, c_3. Finden Sie ein $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = Q \cdot X$? Woher kommt die Dreiecksform von X?

8. Sei $A = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

   (b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix Q, sodass $A = Q \cdot D \cdot Q^T$.