

**Übungen zu  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2  
14. Übungsblatt für den 21. Juni 2010**

1. (Mathematica) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -30 & -24 & -29 & -1 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \\ 37 & 28 & 36 & 1 \\ -241 & -200 & -250 & -7 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist  $c_A = (t^2 - 5t + 6)(t + 4)^2$ .

- (a) Benutzen Sie diese Zerlegung von  $c_A$ , um  $h_A$ -invariante Unterräume  $U_1$  und  $U_2$  mit  $\mathbb{R}^4 = U_1 \dot{+} U_2$ ,  $U_1 \neq \{0\}$ ,  $U_2 \neq \{0\}$  zu finden.
  - (b) Finden Sie Basen  $B_1, B_2$  von  $U_1$  und  $U_2$ .
  - (c) Bilden Sie aus den Vektoren von  $B_1$  und  $B_2$  eine Basis  $B$  von  $\mathbb{R}^4$ , und berechnen Sie  $S_{h_A}(B, B)$ .
2. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A^2 = A$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^n = N(A) \dot{+} S(A)$ . *Zusatzfrage als Bonus:* Muss  $A$  dann diagonalisierbar sein?

3. (Mathematica) Sei  $A \in \mathbb{R}^3$  gegeben durch  $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ . Es

gilt  $c_A = (t - 2)(t + 4)^2$ .

- (a) Bestimmen Sie  $U_1 = N(A - 2 * E)$  und  $U_2 = N((A + 4 * E)^2)$ .
  - (b) Finden Sie aus der Darstellung  $a(t) \cdot (t - 2) + b(t) \cdot (t + 4)^2 = 1$  Matrizen  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , sodass für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  gilt:  $A_1 \cdot x \in U_1$ ,  $A_2 \cdot x \in U_2$ ,  $A_1 \cdot x + A_2 \cdot x = x$ . (*Hinweis:* Verwenden Sie Mathematica und `PolynomialExtendedGCD[p, q, t]`).
  - (c) Berechnen Sie Basen für den Spaltenraum von  $A_1$  und von  $A_2$ .
4. Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix über dem Körper  $K$ .
- (a) Zeigen Sie, dass für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $N(A^m) \subseteq N(A^{m+1})$ .
  - (b) Zeigen Sie: Wenn  $m \in \mathbb{N}_0$  so ist, dass  $N(A^m) = N(A^{m+1})$ , so gilt  $N(A^m) = N(A^j)$  für alle  $j \geq m$ .
  - (c) Zeigen Sie, dass  $A$  genau dann nilpotent ist, wenn  $A^n = 0$ .
5. Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix über dem Körper  $K$ , sei  $x \in K^n$ , und sei  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $A^k \cdot x = 0$ . Sei  $c_A(t) = t^e \cdot r(t)$ , sodass  $t$  das Polynom  $r(t)$  nicht teilt. Zeigen Sie, dass  $A^e \cdot x = 0$ . *Hinweis:* Für  $p(t) := t^e \cdot r(t)$  und für  $q(t) := t^k$  gilt  $\hat{p}(A) \cdot x = \hat{q}(A) \cdot x = 0$ .
6. Seien  $U, V$  Unterräume von  $K^n$  mit  $U \subseteq V$ , sei  $(u_1, \dots, u_k)$  eine Basis von  $U$ , und seien  $v_1, \dots, v_l \in V$ . Zeigen Sie, dass  $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l)$  genau dann eine Basis von  $V$  ist, wenn  $(v_1, \dots, v_l)$  eine Basis von  $V$  modulo  $U$  ist.

7. (a) Sei  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , und sei  $B$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  mit  $S_\varphi(B, B) = J(0, n)$ . Berechnen Sie für jedes  $i \in \mathbb{N}_0$  eine Basis von  $\ker(\varphi^i)$ , und die Dimension von  $\ker(\varphi^i)$ .
- (b) Seien  $m_1, \dots, m_d \in \mathbb{N}$ , sei  $n := \sum_{i=1}^d m_i$ , und sei  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(x) := (J(0, m_1) \oplus \dots \oplus J(0, m_d)) \cdot x$ . Berechnen Sie  $\dim(\ker(\varphi))$ , und für alle  $i \in \mathbb{N}$  die Dimension von  $\ker(\varphi^i)$ . Verwenden Sie zum Ausdrücken des Ergebnisses die Zahl  $a(k) := |\{j \in \{1, \dots, d\} \mid m_j = k\}|$ . Die Zahl  $a(k)$  gibt also die Anzahl der Jordankästchen der Dimension  $k$  an.

8. (Mathematica) Sei  $A = \begin{pmatrix} 18 & -22 & 1 & -11 \\ 18 & -22 & 1 & -11 \\ 8 & -9 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Bestimmen Sie  $N(A^3)$ ,  $N(A^2)$ ,  $N(A)$ .
- (b) Bestimmen Sie eine Basis  $B_3$  von  $N(A^3)$  modulo  $N(A^2)$ .
- (c) Vervollständigen Sie  $\{A \cdot v \mid v \in B_3\}$  zu einer Basis  $B_2$  von  $N(A^2)$  modulo  $N(A)$ .
- (d) Vervollständigen Sie  $\{A \cdot w \mid w \in B_2\}$  zu einer Basis  $B_1$  von  $N(A)$ .
- (e) Ordnen Sie die Vektoren in  $B_1 \cup B_2 \cup B_3$  passend zu einer Basis  $B$  an, sodass  $S_{h_A}(B, B)$  eine  $\oplus$ -Summe von Jordankästchen ist.