

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
13. Übungsblatt für den 14.6.2010**

1. Gegeben ist der Vektorraum \mathbb{R}^4 . Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ und $V :=$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie $U + V$ durch Angabe einer Basis.
 - (b) Zeigen Sie, dass die Summe $U + V$ nicht direkt ist.
 - (c) Finden Sie einen Vektor, der sich auf zumindest 2 verschiedene Arten als Summe $u + v$, $u \in U$, $v \in V$ darstellen lässt.
 - (d) Finden Sie drei Unterräume $U_1, U_2, U_3 \in \mathbb{R}^4$ sodass die Summe der drei Unterräume nicht direkt ist, die Unterräume aber paarweise den Durchschnitt Null haben.
2. (Übungsbeispiel 16.3 des Skriptums) Sei A eine $n \times n$ -Matrix über K , und seien $p, q \in K[t]$. Zeigen Sie, dass für die Matrizen $B := \hat{p}(A)$ und $C := \hat{q}(A)$ gilt, dass $B \cdot C = C \cdot B$.
3. Berechnen Sie die Matrizen B_0, B_1, B_2 aus dem Beweis von Satz 16.4 für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Sind $-B_0 \cdot A$, $B_0 - B_1 \cdot A$, $B_1 - B_2 \cdot A$ und B_2 Diagonalmatrizen?
4. (a) Sei $(d_1, \dots, d_n) \in K^n$, und sei A die Diagonalmatrix $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Berechnen Sie Eigenwerte und das charakteristische Polynom von A . Können Sie für solche Diagonalmatrizen den Satz von Cayley-Hamilton beweisen, ohne auf den Beweis aus der Vorlesung zurückzugreifen?
- (b) Können Sie den Satz von Cayley-Hamilton für diagonalisierbare Matrizen beweisen, ohne auf den Beweis aus der VL zurückzugreifen?
5. (a) Sei $A \in K_n^n$ eine invertierbare Matrix und sei $c_A = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ ihr charakteristisches Polynom. Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \frac{-1}{c_0}(c_1E + c_2A + \dots + A^{n-1})$.

(b) Verwenden Sie den soeben bewiesenen Satz um damit auf diese Art

$$A^{-1} \text{ zu berechnen, wobei } A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und zerlegen Sie es in irreduzible Faktoren (über \mathbb{R} !).

(b) Berechnen Sie nun mit Hilfe von Satz 16.11 zwei nichttriviale h_A -invariante Unterräume U_1 und U_2 von \mathbb{R}^3 und bestimmen Sie deren Basen B_1 und B_2 .

Im folgenden sollen die Nachweise rechnerisch anhand des Beispiels erfolgen, nicht durch Verweis auf einen Satz im Skriptum.

(c) Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 h_A -invariant sind.

(d) Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$ und dass die Summe direkt ist.

7. (Fortsetzung von Beispiel 6). Finden Sie eine Matrix C sodass $C^{-1} \cdot A \cdot C$, mit A aus Beispiel 6, Blockdiagonalform hat. (Hinweis: Satz 16.10 und Beispiel 6. b).

8. Sei $A \in K_n^n$ und seien $p, q \in K[t]$ so, dass $(\hat{p}\hat{q})(A) = 0$ und $ggT(p, q) = 1$. Zeigen Sie, dass der Spaltenraum von $\hat{p}(A)$ gleich dem Nullraum von $\hat{q}(A)$ ist.