

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
12. Übungsblatt für den 7.6.2010**

1. Seien U und V Vektorräume über einem Körper K . Sei (b_1, \dots, b_n) Basis von U und $(y_1, \dots, y_n) \in V$. Sei $f : \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ eine Funktion mit $f(b_i) = y_i$, und sei h die Erweiterung von f zu einem Homomorphismus zwischen U und V :

- (a) Gilt f injektiv $\Rightarrow h$ injektiv?
- (b) Gilt f injektiv und (y_1, \dots, y_n) l.u. $\Rightarrow h$ injektiv?
- (c) Zeigen Sie: h surjektiv $\Leftrightarrow L(y_1, \dots, y_n) = V$.

2. Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^4 über dem Körper \mathbb{R} . Sei $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $y_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Finden Sie einen Homomorphismus h von \mathbb{R}^4 nach \mathbb{R}^4 sodass $h(b_1) = y_1$, $h(b_2) = y_2$ und h ist nicht bijektiv.
 - (b) Finden Sie einen Homomorphismus h von \mathbb{R}^4 nach \mathbb{R}^4 sodass $h(b_1) = y_1$, $h(b_2) = y_2$ und h ist bijektiv.
3. Sei V ein Vektorraum über K und U ein Unterraum von V .
- (a) Zeigen Sie, dass die Relation \sim_U , die durch $v \sim_U w :\Leftrightarrow v - w \in U$ definiert ist, eine Äquivalenzrelation auf V ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in V$ gilt: $v/\sim_U = v + U$.
 - (c) Zeigen Sie: V/U ist gleich der Faktormenge V/\sim_U .
4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (a) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem für \sim_U .
 - (b) Bestimmen Sie V/U .
 - (c) Berechnen Sie $\dim(V/U)$.

- (d) Berechnen Sie im Faktorraum V/U : $((1, 2, 1) + U) \oplus 2 * ((2, 0, 0) + U)$. Zu welchem Repräsentanten Ihres Repräsentantensystems ist das Ergebnis äquivalent?
- (e) Finden Sie eine Basis von V/U .
5. Seien U, V Vektorräume, h ein Isomorphismus von U nach V und sei B eine Basis von U . Zeigen Sie, dass $h(B)$ eine Basis von V ist.
6. Sei $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x - y + z, -3y + z)$. h ist eine lineare Abbildung (warum?).
- (a) Bestimmen Sie $\ker(h)$ und $\dim(\ker(h))$.
- (b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{im}(h))$ und eine Basis von $\operatorname{im}(h)$.
- (c) Bestimmen Sie eine Basis von $V/\ker(h)$.
7. Sei U der Vektorraum aller Polynome über \mathbb{R} mit Grad kleiner oder gleich 2. Sei $h : U \rightarrow U, p \mapsto p'$ wobei p' die übliche Ableitung ist. Zeigen Sie, dass h eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie anschließend $\ker(h)$, $\operatorname{im}(h)$, deren Dimensionen und Basen.
8. Sei U der Vektorraum aller Polynome über \mathbb{R} mit Grad kleiner oder gleich 2. Sei $V = \mathbb{R}$. Sei $h : U \rightarrow V, p(x) \mapsto \int_0^1 p(x) dx$. Zeigen Sie, dass h eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie anschließend $\ker(h)$, $\operatorname{im}(h)$, deren Dimensionen und Basen.