

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
11. Übungsblatt für den 31. Mai 2010**

1. Sei A diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ auch A^n diagonalisierbar ist. Falls A ähnlich ist zu $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, wie sieht dann die Diagonalform von A^n aus?
2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nilpotent, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ sodass A^k die Nullmatrix ist. Zeigen Sie, dass A nur den Eigenwert 0 hat und dass $\text{Det}(A) = 0$. *Zusatzfrage als Bonus:* Welche Polynome kommen als charakteristische Polynome nilpotenter Matrizen in Frage? (Betrachten Sie die Nullstellen eines solchen Polynoms.)
3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h. $A = A^\top$. Zeigen Sie, dass A nur reelle Eigenwerte hat. *Hinweis:* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\bar{\lambda}$ die zugehörige konjugiert komplexe Zahl. Sei v der Eigenvektor zu λ und sei \bar{v} jener Vektor deren Komponenten die konjugiert komplexen Zahlen der entsprechenden Einträge von v sind. Schreiben Sie v bzw. \bar{v} als $n \times 1$ Matrix und zeigen Sie, dass $\lambda(v^\top \bar{v}) = \bar{\lambda}(v^\top \bar{v})$.
4. Lösen Sie das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_1(x) + 2f_2(x) \\ f_2'(x) &= 2f_1(x) + f_2(x) \\ f_3'(x) &= f_1(x) + f_2(x) + 2f_3(x) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1$.

5. Gegeben sei die lineare Rekurrenz $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - 2x_{n-3}$ für $n = 3, 4, \dots$ mit den Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$. Finden Sie eine explizite Formel für x_n , $n \in \mathbb{N}_0$.
6. Die Fibonacci Folge $(F_n)_{n \geq 0}$ ist definiert durch $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n = 2, 3, \dots$, wobei $F_0 = F_1 = 1$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

7. Die Rückgabewahrscheinlichkeiten einer Mietwagenfirma mit 3 Standplätzen sind durch folgende stochastische Matrix gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix},$$

d.h. $P(i, j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein in j geliehenes Auto in i zurückgegeben wird. Wir nehmen an, dass jeden Tag jedes Auto ausgeliehen und am Abend wieder abgegeben wird. Wie sind die Autos nach 30 Tagen auf die drei Standplätze verteilt? Was wird im Laufe der Zeit passieren?

8. Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und sei $h_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A \cdot v$. Bestimmen Sie Basen von $\ker(h_A)$ und $\text{im}(h_A)$, sowie $\dim(\ker(h_A))$, $\dim(\text{im}(h_A))$ und $\text{rk}(A)$.