Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
10. Übungsblatt für den 17. Mai 2010

1. Seien A und B ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass diese die gleichen Eigenwerte mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben.

2. Zeigen Sie: Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A^\top$ diagonalisierbar ist.

3. Seien A und B ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn B diagonalisierbar ist.

4. Zeigen Sie: Die Summe von zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Matrix A ist kein Eigenvektor von A.

5. Seien A und B ähnliche Matrizen in $K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n A(i,i) = \sum_{i=1}^n B(i,i)$.

6. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sodass für alle $1 \le i \le n$ gilt
$$|A(i,i)| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |A(i,j)|,$$
dann ist A regulär.

7. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie dass es ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ gibt, sodass
$$|\lambda - A(i,i)| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |A(j,i)|.$$

8. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Basen für die Eigenräume von A und eine reguläre Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.