Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
9. Übungsblatt für den 10. Mai 2010

1. Beweisen Sie Satz 13.32 aus der Vorlesung.

2. (a) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Finden Sie die Eigenwerte von A und eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ sodass $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.

   (b) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$ sodass $S_{h_A}(B, B)$ mit A aus 2a eine Diagonalmatrix ist.

3. Sei A eine $m \times m$ Matrix mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Det}(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_m$.

4. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Diagonalisieren Sie (falls möglich) die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar?

8. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diagonalisieren Sie A über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, je nach dem was möglich ist.