

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
8. Übungsblatt für den 3. Mai 2010**

1. Finden Sie zwei Polynome p, q für welche gilt

$$\deg(p + q) < \max(\deg(p), \deg(q)).$$

2. Bestimmen Sie den Rest bei Division von $p(x)$ durch $q(x)$, falls:

(a) $p(x) = 6x^4 + 4x^3 + x^2 - 3x + 4$ und $q(x) = 2x^2 + x - 1$ in $\mathbb{R}[x]$;

(b) $p(x) = x^7 + x^3 + x^1$ und $q(x) = x^2 + x + 1$ in $\mathbb{Z}_2[x]$.

3. Zeigen Sie: $x^m - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist genau dann ein Teiler von $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, wenn $m|n$. *Hinweis:* Sei $k \in \mathbb{N}_0$ sodass $km \leq n < (k+1)m$. Betrachten Sie den Rest bei Division von $x^n - 1$ durch $x^m - 1$.

4. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 55860 und 67270 und stellen Sie diesen in der Form $u55860 + v67270$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$ dar.

5. (a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler d der Polynome $f(x) := x^3 + 1$ und $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ in $\mathbb{Z}_2[x]$. Finden Sie u und v in $\mathbb{Z}_2[x]$ sodass $d = uf + vg$.

(b) Seien $f(x) = 2x^4 + 3x$ und $g(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2$ in $\mathbb{Q}[x]$. Finden Sie u und v in $\mathbb{Q}[x]$ mit $\text{ggT}(f, g) = uf + vg$.

6. Sei K ein Körper und sei $f \in K[x]$ ein Polynom mit $\deg(f) \geq 2$ und einer Nullstelle $\alpha \in K$. Zeigen Sie, dass f nicht irreduzibel ist.

7. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jedes Polynom vom Grad 2 oder 3 über K , das keine Nullstelle hat, irreduzibel ist.

8. Sei K ein Körper, sei $f \in K[x]$ und sei $\alpha \in K$. Zeigen Sie: Falls $f^K(\alpha) \neq 0$, dann hat die Nullstelle α von $(x - \alpha)^n f(x)$ die Vielfachheit n .