Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
7. Übungsblatt für den 26. April 2010

1. (a) Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$ so, dass $x = ua + vb$. Zeigen Sie: Wenn x sowohl a als auch b teilt, so gilt $x = \mathrm{ggT}(a, b)$.

   (b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ so, dass $a \mid y$, $b \mid y$, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie (ohne Vorgriff auf die Primfaktorzerlegung): $a \cdot b \mid y$.

2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ (nicht beide 0), und sei $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung:
   $$\mathrm{ggT}(ka, kb) \mid k\,\mathrm{ggT}(a, b).$$

   (b) Zeigen Sie: $\mathrm{ggT}(ka, kb) = k\,\mathrm{ggT}(a, b)$.

3. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2, p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie: $p_n \leq 2^{(2^{n-1})}$.

4. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2, p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie, auch, ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass Folgendes gilt: Wenn
   $$a = \prod p_i^{\alpha_i}$$
   $$b = \prod p_i^{\beta_i},$$
   wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, und fast alle $\alpha_i, \beta_i = 0$ sind, dann gilt $a \mid b$ genau dann, wenn für alle i gilt: $\alpha_i \leq \beta_i$. (Zeigen Sie, dass diese Aussage für alle Primfaktorzerlegungen von a und b gilt. Folgt daraus die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung?)

5. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2, p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie: Wenn
   $$a = \prod p_i^{\alpha_i}$$
   $$b = \prod p_i^{\beta_i},$$
   wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, und fast alle $\alpha_i, \beta_i = 0$ sind, dann gilt
   $$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}.$$

6. Welche Zahlen $q \in \mathbb{N}$ erfüllen folgende Eigenschaft?
   Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q \mid a \cdot b$ gilt $q \mid a$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $q \mid b^n$.

7. Sei K ein kommutativer Ring mit Eins, seien p, q, r Polynome über K, und sei e das Polynom $(1, 0, \ldots, 0)$. Zeigen Sie:

(a) $p \cdot q = q \cdot p$.

(b) $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$.

(c) $p \cdot e = p$.

8. Für $f := (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in K[x] \setminus \{0\}$, K ein Körper, ist der *Grad* von f, $\deg(f)$, jenes $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $a_n \neq 0$ und $a_i = 0$ für alle $i > n$. Dann nennen wir a_n den *führenden Koeffizienten* von f. Wir definieren $\deg(0) := -1$.

   Seien $a, f, g \in K[x] \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

   (a) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

   (b) $(a \cdot f = a \cdot g) \Rightarrow (f = g)$.

   (c) $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$.