Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
6. Übungsblatt für den 19. April 2010

Die Einträge der folgenden Matrizen seien Elemente eines Körpers K.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\det(A) = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$.

2. Zeigen Sie:
   Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, dann ist $\det(A) = \prod_{n \geq k > j \geq 1} (a_k - a_j)$.

3. Gegeben sei das Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ mit unbekannten Koeffizienten a_i.
   Gegeben seien n Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, mit deren Hilfe das Polynom interpoliert werden soll, wobei die x_i als die Stützstellen bezeichnet werden. Zeigen Sie mit Hilfe von Bsp. 2, dass dieses Problem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die Stützstellen paarweise verschieden sind.

4. Seien A, B regulär. Zeigen Sie: $(AB)^{\mathrm{ad}} = B^{\mathrm{ad}} A^{\mathrm{ad}}$.

5. Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\mathrm{ad}})$.

6. Sei A eine $n \times n$–Matrix. Zeigen Sie: $\det(A^{\mathrm{ad}}) = (\det(A))^{n-1}$.

7. Zeigen Sie:
   (a) Ist A regulär, so auch A^{ad}.
   (b) In diesem Fall gilt: $(A^{\mathrm{ad}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{ad}}$.

8. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie den Wert von x_3 mit Hilfe der Cramer'schen Regel.