Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
5. Übungsblatt für den 12. April 2010

1. Seien $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ und $P_3 = (x_3, y_3)$ Punkte im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es genau dann eine Gerade gibt, die durch P_1, P_2 und P_3 geht, wenn $\det(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}) = 0$.

2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei E die $m \times m$-Einheitsmatrix, sei O die $m \times n$-Matrix, die aus lauter Nullern besteht, sei X eine $n \times m$-Matrix, und sei Y eine $n \times n$-Matrix. Wir bilden aus diesen Matrizen eine $((m+n) \times (m+n))$-Matrix
$$A = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline X & Y \end{array}\right).$$
Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(Y)$.

3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei O die $m \times n$-Matrix, die aus lauter Nullern besteht, sei B eine $m \times m$-Matrix, sei X eine $n \times m$-Matrix, und sei Y eine $n \times n$-Matrix. Wir bilden aus diesen Matrizen eine $((m+n) \times (m+n))$-Matrix
$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline X & Y \end{array}\right).$$
Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(B)\det(Y)$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei U die $n \times n$-Matrix, deren Einträge alle gleich 1 sind, und sei E die $n \times n$-Einheitsmatrix. Berechnen Sie $\det(U)$ und für jede reelle Zahl a die Determinante $\det(E + a\,U)$, also
$$\det(\begin{pmatrix} 1+a & a & \dots & a \\ a & 1+a & \dots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & 1+a \end{pmatrix}).$$

5. (a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, sodass die Zeilen von
$$A := t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
linear abhängig sind.

(b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, sodass die Zeilen von

$$B := t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

6. Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. (a) Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen und die ihrer inversen, falls sie existieren.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und A, B zwei $n \times n$-Matrizen. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$