

**Übungen zu  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2  
4. Übungsblatt für den 22. März 2010**

1. Sei  $D$  eine Funktion von  $(\mathbb{R}^4)^4$  nach  $\mathbb{R}$ , die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) auf Seite 159 des Vorlesungsskriptums erfüllt, und sei  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

(a) Bestimmen Sie  $D(e_2, e_3, e_1, e_4)$ ,  $D(e_4, e_3, e_2, e_1)$ ,  $D(e_2, e_3, e_4, e_1)$ , indem Sie Satz 12.1 (2) verwenden, also durch Vertauschen der Argumente  $D(e_1, e_2, e_3, e_4)$  erreichen.

(b) Bestimmen Sie

$$D\left( \begin{array}{l} (-2, 0, 8, 0), \\ (0, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 1), \\ (5, 0, 4, 0) \end{array} \right),$$

indem Sie verwenden, dass  $D$  multilinear, alternierend und normiert ist.

2. Sei  $D$  eine Funktion von  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$ , die die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) erfüllt.

(a) Bestimmen Sie

$$D\left( \begin{array}{l} (1, -2, -3), \\ (4, 0, -5), \\ (6, 7, 8) \end{array} \right).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$D\left( \begin{array}{l} (a_1, a_1, 2), \\ (a_2, a_2, 0), \\ (a_3, a_3, 1) \end{array} \right) = 0.$$

3. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$  die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$  die einzige Funktion von  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  ist, die (D1), (D2), (D3) erfüllt.

4. Sei  $m \in \mathbb{N}$ , und sei  $f$  die Permutation, die durch

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ m & m-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

also durch  $f(x) := m + 1 - x$  für  $x \in \{1, \dots, m\}$  gegeben ist. Berechnen Sie die Signatur von  $f$  (in Abhängigkeit von  $m$ ).

5. Für eine Permutation  $\alpha \in S_m$  schreiben wir  $\alpha^n$  für  $\underbrace{\alpha \circ \dots \circ \alpha}_{n \text{ mal}}$ ;  $\alpha^0$  ist die identische Abbildung  $\text{id}_{\{1, \dots, m\}}$ . Wir nennen eine Permutation *gerade*, wenn  $\text{sgn}(f) = 1$ , und *ungerade* sonst. Sei nun  $\beta \in S_m$ . Zeigen Sie, dass die Menge

$$B = \{\beta^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

entweder nur gerade, oder aber genauso viele gerade wie ungerade Permutationen enthält.

6. Der Beweis von Satz 12.6 (1) liefert eine Zerlegung einer Permutation in ein Produkt von Transpositionen.

(a) Zerlegen Sie  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  in ein Produkt von Transpositionen.

(b) Zerlegen Sie  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  in ein Produkt von Transpositionen.

Geben Sie die Signatur von  $\alpha$  und von  $\beta$  an.

7. (a) Sei  $m \in \mathbb{N}$ , und seien  $f, g \in S_m$ . Wir definieren  $F$  durch  $F : S_m \rightarrow S_m$ ,  $h \mapsto f \circ h \circ g$ . Zeigen Sie, dass  $F$  bijektiv ist.

(b) Sei  $m \in \mathbb{N}$ , und sei  $G : S_m \rightarrow S_m$ ,  $G(\sigma) := \sigma^{-1}$  für  $\sigma \in S_m$ . Zeigen Sie, dass  $G$  bijektiv ist.

8. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

*Hinweis:* Für das Berechnen der Determinante von  $C$  beachten Sie, dass  $\mathbf{D}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathbf{D}(z_1, -z_1 + z_2, -z_1 + z_3, -z_1 + z_4)$  ist.