Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
2. Übungsblatt für den 8. März 2010

1. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^{[0,1]}$, also auf der Menge der Funktionen von $[0,1]$ in die reellen Zahlen. Es gelte $f \sim g :\Leftrightarrow f(1) = g(1)$.
   (a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $f = x^2$, ohne das Symbol "$\sim$" zu verwenden.
   (b) Bestimmen Sie die Faktormenge $M/\sim$, ohne die Symbole "$[\,.\,]_\sim$" oder "$\sim$" zu verwenden (etwa $M/\sim = \{\{\ldots\}\ldots\}$).
   (c) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.
2. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^3$. Es gelte $(x, y, z) \sim (u, v, w) :\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$.
   (a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $P = (3, 0, -4)$, ohne das Symbol "$\sim$" zu verwenden.
   (b) Bestimmen Sie die Faktormenge $M/\sim$, ohne die Symbole "$[\,.\,]_\sim$" oder "$\sim$" zu verwenden (etwa $M/\sim = \{\{\ldots\}\ldots\}$).
   (c) Interpretieren Sie $M/\sim$ graphisch.
   (d) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.
3. (a) Seien A, B nichtleere Mengen mit $A \precsim B$. Zeigen Sie, dass es eine surjektive Funktion von B auf A gibt.
   (b) Wir nehmen an, dass $A_1 \sim A_2$ und $B_1 \sim B_2$. Zeigen Sie, dass dann auch $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.
   (c) Wir nehmen an, dass $A_1 \sim A_2$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{P}(A_1) \sim \mathcal{P}(A_2)$.
4. (a) Sei A eine Menge. Finden Sie eine bijektive Abbildung von $\mathcal{P}(A)$ nach $\{0,1\}^A$.
   (b) Ist für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{a\} \cup \mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$?
5. Zeigen Sie, dass die Vereinigung einer abzählbar unendlichen mit einer endlichen Menge abzählbar unendlich ist.
6. Zeigen Sie, dass eine Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen abzählbar ist, indem Sie eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf diese Menge definieren.
7. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{N}^n$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
8. Zeigen Sie, dass die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.