**Übungen zu**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2**
**1. Übungsblatt für den 1. März 2010**

1. Bestimmen Sie jeweils alle Partitionen der Menge $\{1,2,3\}$ und der Menge $\{1,2,3,4\}$.

2. Wir definieren auf $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation $\sim$ durch $\binom{a_1}{b_1} \sim \binom{a_2}{b_2} :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2$. Zeigen Sie, dass für alle $\binom{a_1}{b_1}, \binom{a_2}{b_2}, \binom{a_3}{b_3}, \binom{a_4}{b_4} \in A$ gilt:, wenn $\binom{a_1}{b_1} \sim \binom{a_2}{b_2}$ und $\binom{a_3}{b_3} \sim \binom{a_4}{b_4}$, so gilt auch $\binom{a_1 b_3 + b_1 a_3}{b_1 b_3} \sim \binom{a_2 b_4 + b_2 a_4}{b_2 b_4}$. Welche Bedeutung hat das für das Rechnen mit Brüchen?

3. Bestimmen Sie jeweils, welche der Eigenschaften *Reflexivität*, *Transitivität*, *Symmetrie*, *Antisymmetrie* jede der folgenden Relationen erfüllt.

   (a) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$.
   (b) $A = \mathbb{N}$, $(m,n) \in \rho \Leftrightarrow n = m+1$.
   (c) $A = \{1,2\}$, $\rho = \{(1,2),(2,1)\}$.
   (d) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(2,3)\}$.
   (e) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(1,2)\}$.
   (f) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
   (g) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \emptyset$.
   (h) $A = \emptyset$, $\rho = \emptyset$.

4. Bestimmen Sie jeweils, welche der Eigenschaften *Reflexivität*, *Transitivität*, *Symmetrie*, *Antisymmetrie* jede der folgenden Relationen erfüllt. Welche der genannten Relationen sind Äquivalenzrelationen, welche Ordnungsrelationen?

   (a) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(3,2)\}$.
   (b) $A = \mathbb{N}$, $(m,n) \in \rho \Leftrightarrow n - m \in \{0,1\}$.
   (c) $A = \mathbb{N}$, $(m,n) \in \rho \Leftrightarrow |m-n| \leq 5$.
   (d) $A = \{1,2,3,4\}$, $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4)\}$.
   (e) $A = \{1,2,3\}$, $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a \leq b$.
   (f) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$.
   (g) $A = \{1,2,3\}$, $\rho = \{(a,b) \in A \times A \mid a = b\}$.

5. Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede Relation, die symmetrisch und antisymmetrisch ist, auch transitiv ist.

6. Sei $A := \mathbb{R}^2$ und sei $\sim$ die Relation, die durch

$$\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow a = c$$

definiert ist. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.

   (a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie diese Klasse in der Form $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots\}$ an, ohne das Symbol "$\sim$" zu verwenden.

   (b) Bestimmen Sie die Faktormenge $\mathbb{R}^2/\sim$. Geben Sie diese Faktormenge an, ohne die Symbole "$[\,.\,]_\sim$" oder "$\sim$" zu verwenden.

   (c) Geben Sie ein Repräsentantensystem für $\sim$ an.

7. Sei $V := \mathbb{R}^3$, und sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$. Wir definieren eine Relation $\approx$ auf $V$ durch $v \approx w \Leftrightarrow h(v) = h(w)$ für alle $v, w \in V$.

   (a) Ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation? Wenn ja, geben Sie die Faktormenge $V/\approx$ an. Können Sie das auch, ohne das Symbol $\approx$ zu verwenden?

   (b) Ist $\approx$ eine Ordnungsrelation?

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $a \approx b$ genau dann, wenn $a - b \in L(\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$.

8. Sei $M := \{U \mid U \text{ ist Unterraum von } \mathbb{R}^3 \text{ und } U \neq \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}\}$.

   (a) Finden Sie alle kleinsten, größten, maximalen, minimalen Elemente von $(M, \subseteq)$.

   (b) Finden Sie, wenn möglich, eine obere Schranke und eine untere Schranke von $T = \{L(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)), L(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))\}$.