Operatoren h_i, h_j dieselben Eigenzustände haben, also bezüglich der gleichen ONB diagonalisiert werden können. Dies ist (s. Übungen) genau dann der Fall, wenn $h_i \circ h_j = h_j \circ h_i$ gilt, wenn h_i und h_j also "kommutieren". In der Physik zeigt man z.B., daß für die Operatoren p und v, welche den Observablen "Position" und "Geschwindigkeit" entsprechen, die Gleichung $p \circ v - v \circ p = \frac{\hbar}{i\,m}\,\mathrm{id} \neq \mathbf{o}$ gilt. Dabei ist $i = \sqrt{-1}$, m die Masse des Teilchens und $\hbar$ das Planck'sche Wirkungsquantum $= 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js ist. Daraus ergibt sich, daß Position und Geschwindigkeit von Teilchen nicht zugleich exakt gemessen werden können (Heisenberg'sches Unschärfeprinzip). Für große Massen m ist $p \circ v - v \circ p$ aber "sehr klein", sodaß man sich der klassischen Mechanik annähert.

Es ist natürlich nicht möglich, obige Prinzipien der Quantentheorie in ein paar Zeilen zu erläutern und zu begründen. Bei den nächsten drei Anwendungen ist dies schon leichter möglich. Statt umständlichen allgemeinen Beschreibungen geben wir Beispiele, aus denen der allgemeine Fall ersichtlich wird.

58.10 ***Lineare Differentialgleichungen.*** Eine Differentialgleichung ist eine "Gleichung" für eine oder mehrere Funktionen, $f_1, f_2, \ldots$, welche auch Ableitungen der f_i enthält. Eine der einfachsten, aber wichtigsten Gleichungen ist

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

Aus $\frac{f'(x)}{f(x)} = a$ (für $f(x) \neq 0$) erhält man durch Integrieren $\ln f(x) = ax+c$, also $f(x) = e^c \cdot e^{ax}$. Für $x = 0$ ergibt sich daraus $f(0) = e^c$, insgesamt also

$$f(x) = f(0)e^{ax}.$$

k

(2x)

Schwieriger wird's, wenn mehrere f_i auftauchen, wie etwa in dem "linearen homogenen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung"

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_1(x) - f_2(x) + 4f_3(x) \\ f_2'(x) &= 3f_1(x) + 2f_2(x) - f_3(x) \\ f_3'(x) &= 2f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) \end{aligned}$$

welches wir in der Form

$$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} =: A \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

Aus 57.17 wissen wir, daß mit $C := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$C^{-1} \cdot A \cdot C = \text{diag}(1,-2,3)$, somit $A = C \cdot \text{diag}(1,-2,3) \cdot C^{-1}$.

Sei $\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} := C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$. Dann gilt $\begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \\ g_3'(x) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} =$

$C^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot C \cdot \text{diag}(1,-2,3) \cdot C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} =$

$\text{diag}(1,-2,3) \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ -2g_2(x) \\ 3g_3(x) \end{pmatrix}$, mit den Lösungen

$g_1(x) = g_1(0)e^x$, $g_2(x) = g_2(0)e^{-2x}$, $g_3(x) = g_3(0)e^{3x}$.

Durch Multiplikation mit C erhalten wir alle Lösungen als

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1(0)e^x - g_2(0)e^{-2x} + g_3(0)e^{3x} \\ 4g_1(0)e^x + g_2(0)e^{-2x} + 2g_3(0)e^{3x} \\ g_1(0)e^x + g_2(0)e^{-2x} + g_3(0)e^{3x} \end{pmatrix}$$

Sind weiters noch konkrete "Anfangswerte" wie z.B. $f_1(0)=0$, $f_2(0)=12$, $f_3(0)=6$ gegeben, so erhält man $\begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_3(0) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und damit

$$f_1(x) = -e^x - 2e^{-2x} + 3e^{3x}$$
$$f_2(x) = 4e^x + 2e^{-2x} + 6e^{3x}$$
$$f_3(x) = e^x + 2e^{-2x} + 3e^{3x}$$

Ohne Anfangsbedingungen sieht man übrigens, daß für alle Lösungen gilt:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = g_1(0) \begin{pmatrix} -e^x \\ 4e^x \\ e^x \end{pmatrix} + g_2(0) \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + g_3(0) \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge bildet also einen 3-dimensionalen Vektorraum mit Basis $\begin{pmatrix} -e^x \\ 4e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$.

Diagonalisieren entkoppelt also sich überlagernde Einflüsse!

58.11 ***Lineare*** homogene ***Differenzengleichungen*** k-ter Ordnung sind von der Form

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$$

wie z.B. $x_3 = 2x_2 + 5x_1 - 6x_0$. Daraus kann man

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} =: A \cdot x^{(0)}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot x^{(1)} = A^2 \cdot x^{(0)}$$

etc. herleiten. Wenn wir die "Anfangswerte" $x^{(0)}$ und alle $x^{(t)}$ kennen, so kennen wir alle x_n. Sei etwa $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; wir suchen x_{50}:

$$x^{(48)} = \begin{pmatrix} x_{50} \\ x_{49} \\ x_{48} \end{pmatrix} = A^{48} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A^{48} kann man zwar relativ schnell mittels

$$A^2 = A \cdot A,\ A^4 = A^2 \cdot A^2,\ A^8 = A^4 \cdot A^4,\ A^{16} = A^8 \cdot A^8,\ A^{32} = A^{16} \cdot A^{16},$$

also als $A^{48} = A^{32} \cdot A^{16}$ nach 6 Multiplikationen bekommen. Aber höhere Potenzen werden doch sehr mühsam, und sowas wie "lim A^n" ist völlig außer Reichweite.

Trick: A diagonalisieren; $c_A = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, dies kennen wir aus 57.17. Nullstellen sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, zugehörige Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $C^{-1} \cdot A \cdot C = \operatorname{diag}(1,-2,3) =: D$.

Daher ist $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ und

$$A^{48} = C \cdot D \cdot C^{-1} \cdot C \cdot D \cdot C^{-1} \cdot \ldots \cdot C \cdot D \cdot C^{-1} = C \cdot D^{48} \cdot C^{-1} =$$

$$= C \cdot \operatorname{diag}(1,(-2)^{48}, 3^{48}) \cdot C^{-1}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 30 \\ 8 & -2 & 6 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} x_{50} \\ x_{\cancel{48}} \\ x_{\cancel{47}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71789798468945283718992 \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$ x_{50} x_{49} x_{48}

A "begleitet" $x_0, x_1, x_2, \ldots$ auf dem Weg zu höheren x_n's. Man sagt, A sei eine ***Begleitmatrix***; diese sind allgemeien von der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(alle nicht eingetragenen Positionen sind =0) und heißen auch lineare ***Schieberegister*** (sie "schieben" x_0, x_1, x_2, auf x_1, x_2, x_3, etc.). Wir werden diesen Matrizen nochmals im § 60 begegnen.

```
A={{1,4,9},{1,-2,3},{1,1,1}}; B=Inverse[A];B
  1 1      1   4  1     1 1   1
{{-(-), -, 1}, {--, -(--), -},  {--, --, -(-)}}
  6 6      15   15  5   10 10  5

d=DiagonalMatrix[1,2^48,3^48]; A.d.B.{{0},{1},{0}}
{{71789798468945283718992}, {23929933073181740538025},
 { 79766442326272571968 28}}
```

58.12 ***Markov-Prozesse*** betreffen physikalische oder mathematische "Systeme", welche endlich viele Zustände $z_1, \ldots, z_n$ annehmen können. Der Übergang von einem Zustand z_j zu einem Zustand z_i erfolge mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_{ij} (Achtung auf die Reihenfolge der Indices!). Wir sprechen dann von einem ***stochastischen Prozeß***. Falls kein p_{ij} von der "Vergangenheit" des Systems abhängt, jedes p_{ij} also zeitunabhängig ist, so spricht man genauer von einem ***Markov-Prozeß*** und nennt die p_{ij} die ***Übergangswahrscheinlichkeiten***. $P :=$ $(p_{ij}) \in \mathbb{R}_n^n$ heißt die ***Übergangsmatrix***. Da jeder Zustand z_i sicher in irgendeinen (gleichen oder anderen) Zustand übergeht, muß $p_{1j} + p_{2j}$ $+ \ldots + p_{nj} = 1$ sein. Die Spaltensummen von P sind also alle $=1$ und alle p_{ij} liegen in $[0,1]$. P ist eine sogenannte ***stochastische Matrix***.

Wir beobachten dieses System nun zu den "Zeitpunkten" $0,1,2,\ldots,k,\ldots$ und notieren $x^{(k)} \in \mathbb{R}_n$,

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

wobei $x_i^{(k)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß sich das System zum Zeitpunkt k im Zustand Nr. i befindet. Wieder gilt $x_1^{(k)} + \ldots + x_n^{(k)}$ $= 1$. Der Vektor $x^{(k)} \in \mathbb{R}_n$ heißt der k-te ***Zustandsvektor***.

Eine häufige Fragestellung ist die folgende. Ein Anfangszustand $x^{(0)}$ sei gegeben und man möchte die "zukünftige Entwicklung voraussagen", also $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, berechnen. Ist P die Übergangsmatrix eines Markov-Prozesses, so gilt

$$x^{(k+1)} = P \cdot x^{(k)},$$

also

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= P \cdot x^{(0)} & \\ x^{(2)} &= P \cdot x^{(1)} &= P^2 \cdot x^{(0)} \\ x^{(3)} &= P \cdot x^{(2)} &= P^3 \cdot x^{(0)} \\ &\vdots & \\ x^{(k)} &= P \cdot x^{(k-1)} &= P^k \cdot x^{(0)} \end{aligned}$$

Ein konkretes Beispiel: Eine Mietwagenfirma mit drei Standplätzen 1, 2, 3 weiß aus Erfahrung, daß ein bei j gemieteter Wagen mit Wahrscheinlichkeit p_{ij} am Platz i retourniert wird:

i \ j	1	2	3
1	0.8	0.3	0.2
2	0.1	0.2	0.6
3	0.1	0.5	0.2

Ein beim Platz 1 gemieteter Wagen wird also mit je 10% Wahrscheinlichkeit zu den beiden anderen Plätzen zurückgebracht, etc.. Was passiert im Lauf der Zeit, wenn ein Wagen am Platz 2 ausgeborgt wird?

Lösung: Es ist $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.37 \\ 0.23 \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.477 \\ 0.252 \\ 0.271 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$x^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.556 \\ 0.230 \\ 0.214 \end{pmatrix}, \quad x^{(11)} = \begin{pmatrix} 0.557 \\ 0.230 \\ 0.213 \end{pmatrix}, \ldots$$

Dies legt den Verdacht nahe, daß sich die $x^{(k)}$ mit steigendem k auf einen "stationären Vektor einpendeln".
Um höhere Potenzen in den Griff zu bekommen, versuchen wir (nach dem Muster von 58.11), P zu diagonalisieren. $cp = x^3 - 1.2\,x^2 + 0.01\,x + 0.19 = (x-1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ mit $\lambda_{2,3} = 0.1 \pm \sqrt{0.2}$. Daher ist P diagonalisierbar; Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3$ sind z.B.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.872 \\ 0.359 \\ 0.333 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0.816 \\ -0.431 \\ -0.385 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0.078 \\ -0.743 \\ 0.665 \end{pmatrix}.$$

Setze man wieder $C := (b_1, b_2, b_3)_{\text{Matrix}}$, so gilt

$$P = C \cdot \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot C^{-1},$$

daher

$$P^k = C \cdot \operatorname{diag}(1, \lambda_2^k, \lambda_3^k) \cdot C^{-1},$$

somit

$$x^{(k)} = C \cdot \operatorname{diag}(1, \lambda_2^k, \lambda_3^k) \cdot C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z.B. ist $x^{(20)} = \begin{pmatrix} 0.557374 \\ 0.229510 \\ 0.213116 \end{pmatrix}$. Unser Verdacht erhärtet sich.

$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$ heißt ein ***Gleichgewichtszustand*** für P, falls $P \cdot x = x$ ist; dabei müssen alle $x_i \in [0,1]$ und $x_1 + \ldots + x_n = 1$ sein.

Im obigen Beispiel setzen wir $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ unbestimmt an und erhalten

$$\begin{aligned} 0.8\,x_1 + 0.3\,x_2 + 0.2\,x_3 &= x_1 \\ 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 + 0.6\,x_3 &= x_2 \\ 0.1\,x_1 + 0.5\,x_2 + 0.2\,x_3 &= x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

In den ersten drei Gleichungen ist sicher eine überflüssig, da sie ja ("Spaltensummen = 1") aus den anderen beiden rekonstruiert werden kann. Wir streichen z.B. die erste, und setzen die letzte Gleichung an ihre Stelle:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0.1\,x_1 - 0.8\,x_2 + 0.6\,x_3 &= 0 \\ 0.1\,x_1 + 0.5\,x_2 - 0.8\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und erhalten $x = \begin{pmatrix} 0.557377 \\ 0.229508 \\ 0.213115 \end{pmatrix}$, was schon sehr nahe bei $x^{(20)}$ liegt. Bei einer Flotte von 100 Autos werden nach einiger Zeit (unabhängig vom Anfangszustand) etwa 56 % der Autos am Platz 1, 23 am Platz 2 und 21 am Platz 3 stehen. Man kann übrigens zeigen: Sind in irgendeiner Potenz von P alle Eingänge $\neq 0$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtszustand.

In der folgenden Mathematica-Session ist ein wichtiger Punkt, den Sie mit gehörigem Entsetzen beachten sollten: nimmt man für λ_i gerundete Werte, so bekommt man (natürlich!) **keinen Eigenvektor** zu λ_i ! Ein Wert in der Nähe eines Eigenwerts ist eben **kein** Eigenwert. Man kann ja auch nicht "ein wenig schwanger" sein! Im nächsten Teil wird es noch dicker kommen! Dies bedeutet, daß man "$c_A = 0$" doch genau lösen muß. Dazu gibt es tiefliegende Techniken, wie z.B. die sogenannte Darstellungstheorie endlicher Gruppen.

```
P=0.1*{{8,3,2},{1,2,6},{1,5,2}}
{{0.8, 0.3, 0.2}, {0.1, 0.2, 0.6}, {0.1, 0.5, 0.2}}

cP=char[P,3]
                  2    3
0.19 + 0.01 x - 1.2 x  + x

Solve[cP==0,x]
{{x -> -0.347214}, {x -> 0.547214}, {x -> 1.}}

nP=Flatten[NullSpace[P-IdentityMatrix[3]],1];nP
{0.871795, 0.358974, 0.333333}

NullSpace[P-0.547214*IdentityMatrix[3]]
{}

PolynomialQuotient[cP,x-1,x]
               2
-0.19 - 0.2 x + x

NullSpace[P-(0.1+Sqrt[0.2])*IdentityMatrix[3]]
{{0.816074, -0.430776, -0.385298}}

NullSpace[P-(0.1-Sqrt[0.2])*IdentityMatrix[3]]
{{0.0784468, -0.743059, 0.664612}}

b1=NullSpace[P-IdentityMatrix[3]];
b2=NullSpace[P-(0.1+Sqrt[0.2])*IdentityMatrix[3]];
b3=NullSpace[P-(0.1-Sqrt[0.2])*IdentityMatrix[3]];
B=Transpose[Flatten[{b1,b2,b3},1]]; B
```

```
{{0.871795, 0.816074, 0.0784468}, {0.358974, -0.430776, -0.743059},
{0.333333, -0.385298, 0.664612}}
```

```
d=DiagonalMatrix[1,0.1+Sqrt[0.2],0.1-Sqrt[0.2]];
BB=Inverse[B]; B.MatrixPower[d,20].BB.{{0},{1},{0}}
{{0.557374}, {0.22951}, {0.213116}}
```

```
Q={{1,1,1},{-0.2,0.3,0.2},{0.1,-0.8,0.6}}; LinearSolve[Q,{1,0,0}]
{0.557377, 0.229508, 0.213115}
```

```
B.MatrixPower[d,20].BB.{{0},{1},{0}}-LinearSolve[Q,{1,0,0}]
{{-0.00000292202}, {0.00000154274}, {0.00000137928}}
```

****Zum Spaß schauen wir nach, wie lange alles dauert.****

```
d=DiagonalMatrix[1,0.1+Sqrt[0.2],0.1-Sqrt[0.2]]; BB=Inverse[B];
B.DiagonalMatrix[1,(0.1+Sqrt[0.2])^20,(0.1-Sqrt[0.2])^20].{{0},{1},{0}}//Timing
{0.0833333 Second, {{0.557374}, {0.22951}, {0.213116}}}
```

****Ohne Diagonalisieren:****

```
MatrixPower[P,20].{{0},{1},{0}}//Timing
{0.0833333 Second, {{0.557374}, {0.22951}, {0.213116}}}
```

****Das ist alles andere als eindrucksvoll!!! Wir probieren höhere Potenzen:****

```
d=DiagonalMatrix[1,0.1+Sqrt[0.2],0.1-Sqrt[0.2]]; BB=Inverse[B];
B.DiagonalMatrix[1,(0.1+Sqrt[0.2])^10000,(0.1-Sqrt[0.2])^10000].
BB.{{0},{1},{0}}//Timing
{0.1 Second, {{0.557377}, {0.229508}, {0.213115}}}
```

```
MatrixPower[P,10000].{{0},{1},{0}}//Timing
{0.183333 Second, {{0.557377}, {0.229508}, {0.213115}}}
```

****Mit der Hand würde man es eigentlich ganz anders machen: Für v={{0},{1},{0}} berechnet man der Reihe nach v, P.v, P.(P.v), etc.; wie lange dauert dies?****

```
f[x_]:=P.x;
Nest[f,{{0},{1},{0}},1000]//Timing
{13.1833 Second, {{0.557377}, {0.229508}, {0.213115}}}
```

Ogottogott!

58.13 Anwendungen in der Genetik. Die gesamte Erbinformation ist bei Lebewesen bekanntlich in der Desoxiribonukleinsäure (DNS) enthalten. Diese DNS ist eine (sehr lange) Folge von 4 verschiedenen Aminosäuren (den 4 Nukleotiden). Die DNS kann man in Abschnitte (= Gene) einteilen, sodaß jedes Gen für ein bestimmtes Körpermerkmal (Haarfarbe,...) verantwortlich ist. Jedes Lebewesen bekommt bei der Zeugung für jedes Körpermerkmal ein Gen g_m von der Mutter und eines, g_v, vom Vater vererbt; eines von beiden ist dominant und bestimmt das Körpermerkmal des Kindes, das andere ist "rezessiv". Das (ungeordnete) Paar $<g_m, g_v>$ heißt dann der Genotyp an der jeweiligen Genstelle.

Bestimmte Erkrankungen (Farbblindheit, Sichelzellenanämie, Haemophilie,...) sind genetisch bedingt, d.h. daß an einer Genstelle statt eines "normalen" Genotyps, z.B. $<A,A>$, ein "Krankheitsfaktor" a steht, also entweder der Genotyp $<A,a>$ oder gar $<a,a>$ vorliegt. Ein Lebewesen vom Typ $<A,a>$ ist gesund, aber ein Krankheitsträger , nur beim Typ $<a,a>$ bricht die Krankheit wirklich aus ("autosomal rezessive Krankheiten").

Nehmen wir an (was oft der Fall ist), daß Träger des Typs $<a,a>$ zeugungsunfähig sind; weiters nehmen wir an, ein Programm zur Ausrottung der Krankheit wäre ein "Heiratsverbot" von zwei $<A,a>$-Typen. Dies schließt $<a,a>$-Nachkommen aus, aber noch immer werden Krankheitsträger vorhanden sein. Seien a_n bzw. b_n die Anteile von Typen $<A,A>$ bzw. $<A,a>$ in der n-ten Nachfolgegeneration.

Ähnlich wie bei den Markov-Prozessen gilt für $x^{(n)} := \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$:

$x^{(n)} = P \cdot x^{(n-1)}$ mit einer stochastischen Matrix P (es ist sogar ein Markov-Prozeß!). Hier ist $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Wegen $C^{-1} \cdot P \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gilt bei der Anfangsverteilung $x^{(0)} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - \dfrac{b}{2^n} \\ \dfrac{b}{2^n} \end{pmatrix}$$

Der komponentenweise Limes $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)}$ ist also $\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, sodaß "schließlich und endlich" die Krankheit ausgerottet wird.

Grund dafür ist die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}$, genauer deren Eigenwerte λ_i. Man sieht:

- ☞ Ist $\lambda_i < 1$, so stirbt der i-te Teil der Bevölkerung aus.
- ☞ Ist $\lambda_i = 1$, so bleibt dieser Teil stabil.
- ☞ Ist $\lambda_i > 1$, so "explodiert" dieser Anteil.

Daß es mit Eigenwerten nahe bei 0 kritisch ist, liegt nahe (denn dann "springt A von regulär zu singulär"). Daß auch Eigenwerte bei 1 extrem kritisch sein können, sehen wir an diesem Beispiel. Daher nochmals: **Vorsicht bei Eigenwert-Rundungsfehlern!** Sie können fälschlicherweise vortäuschen, daß eine explodierende Bevölkerung ausstirbt!!

Ohne Diagonalisierung ist eine Berechnung von "lim A" im allgemeinen unmöglich!

58.14 Die *Hauptachsentransformation*. Eine ***Kurve 2. Ordnung*** oder in ***Kegelschnitt*** im $\mathbb{R}_2$ ist die Menge aller $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, welche die Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

erfüllen. In Matrixschreibweise lautet dies

$$x^t \cdot A \cdot x + s.x + f = 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ und $s = (d,e)$. Wir hätten natürlich auch A als $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ nehmen können; da wir aber bald A "orthogonal" diagonalisieren wollen, werden wir nicht so blöd sein und eine nicht-symmetrische Matrix A aufbauen.

Um eine Information darüber zu erhalten, wie der gegebene Kegelschnitt aussieht, "verschieben wir das Koordinatensystem parallel in den "Mittelpunkt" des Kegelschnitts - falls dieser einen "Mittelpunkt" hat. m ist genau dann ein Mittelpunkt, wenn $A \cdot m = -\frac{1}{2} s^t$ gilt.

Fall 1: Der Kegelschnitt hat einen Mittelpunkt m. Dann wenden wir die ***Translation*** $x \to x - m =: y$ an (sie ist affin, nicht linear, ändert aber nicht die "Gestalt" des Kegelschnitts) und erhalten den Kegelschnitt als Lösungsmenge von

$$y^t \cdot A \cdot y + c = 0 \quad \text{mit} \quad c = f + \frac{1}{2} s \cdot m$$

Nun wenden wir eine Drehung und/oder Spiegelung an, um die Gleichung weiter zu vereinfachen. Auch dies verändert nicht die "Art" des Kegelschnitts. A ist symmetrisch, also gibt es eine orthogonale Matrix C mit $C^{-1} \cdot A \cdot C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) =: D$.

Setzen wir $z := C^{-1} \cdot y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, so erhalten wir

$$z^t \cdot D \cdot z + c = 0,$$

also $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -c$. Weiters können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\lambda_1 > 0$ oder $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist. Folgende Fälle können also eintreten:

$c < 0,$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0:$	Ellipse (bei $\lambda_1 = \lambda_2$: Kreis)
	$\lambda_2 = 0:$	Paralleles Geradenpaar
	$\lambda_2 < 0:$	Hyperbel
	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0:$	$\emptyset$
$c = 0,$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0:$	Punkt
	$\lambda_2 = 0:$	Gerade
	$\lambda_2 < 0:$	Sich kreuzendes Geradenpaar
	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0:$	Ganze Ebene
$c > 0,$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0:$	$\emptyset$
	$\lambda_2 \leq 0:$	Hyperbel
	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0:$	$\emptyset$

Fall 2: Der Kegelschnitt hat keinen Mittelpunkt. Dann kann A nicht regulär sein, mindestens ein Eigenwert von A (z.B. λ_2) ist 0. Wir drehen (bzw. spiegeln) gleich und erhalten analog zum Fall 1 mit $y := C^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$y^t \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, 0) \cdot y + s \cdot C \cdot y + f = 0,$$

ausführlich $\lambda_1 y_1^2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + f = 0$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ist $\lambda_1 = 0$, so liegen "ausgeartete Fälle" vor ($\emptyset$, Geraden, ganze Ebene). Sei also $\lambda_1 \neq 0$, o.B.d.A. sei $\lambda_1 = 1$. Wir haben dann

$$y_1^2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + f = 0.$$

Ist $(\alpha,\beta) = (0,0)$, so liegt wieder ein "ausgearteter Fall" vor. Sei z.B. $\beta \neq 0$. Mit $t := \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \cdot\frac{3\alpha^2}{4\beta} + \frac{f}{\beta} \end{pmatrix}$ und $z := y+t =: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ sieht man durch

Einsetzen:

$$z_1^2 + \beta z_2 = 0$$

Wir erhalten dann:

$\beta \neq 0:$	Parabel
$\beta = 0:$	Gerade

Sei z.B. $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 8x_1 + 10x_2 - 5 = 0$, also $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $s = (-8,10)$. Aus $A \cdot m = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ erhält man $m = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Mittelpunkt.

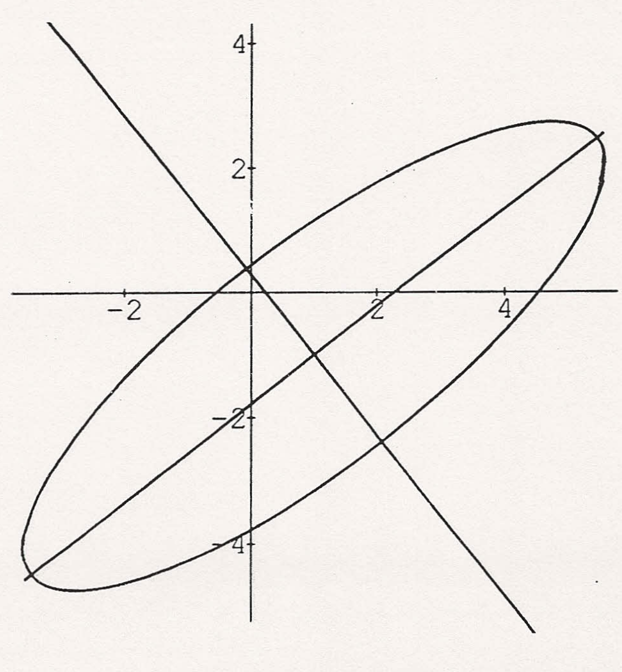
Sei $y = x-m = \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2+1 \end{pmatrix}$; $y^t \cdot A \cdot y - 14 = 0$. Nun wird gedreht. $c_A = x^2 - 5x + 2$ liefert $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ und Eigenvektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$. Normiert ergeben sie $c_1 = \begin{pmatrix} 0.615 \\ -0.788 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 0.788 \\ 0.615 \end{pmatrix}$, liefern also $C = \begin{pmatrix} 0.615 & 0.788 \\ -0.788 & 0.615 \end{pmatrix} = D_{52°}$. Für $C^{-1} \cdot y = C^t \cdot y =: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ gilt also $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) z_1^2 + \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right) z_2^2 = 14$. Es handelt sich somit um eine Ellipse mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, die um 52° aus der "Normallage" gedreht ist.

Solve[2*x^2-4*x*y+3*y^2-8*x+10*y==5,y]//N//Simplify

```
                                                     2
{{y -> 0.166667 (-10. + 4. x + Sqrt[160. + 16. x - 8. x ])},
                                                              2
 {y -> -1.66667 + 0.666667 x - 0.166667 Sqrt[160. + 16. x - 8. x ]}}
```

A={{2,-2},{-2,3}};Eigenvectors[A]/N
{{1.28078, 1.}, {-0.780776, 1.}}

f1[x_]:=0.166661*(-10+4*x+Sqrt[160+16*x-8*x^2]);
f2[x_]:=0.166661*(-10+4*x-Sqrt[160+16*x-8*x^2]);
achse1[x_]:=-1+0.780776*(x-1); achse2[x_]:=-1-1.28078*(x-1)
Plot[{f1[x],f2[x],achse1[x],achse2[x]},{x,-3.55,5.55}, AspectRatio->1.25]



Im $\mathbb{R}_3$ erhält man analog ***Kurven 2. Ordnung*** als

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + hx_2 + ix_3 + j = 0.$$

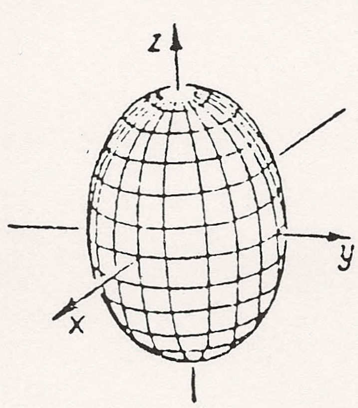
Mittels $A := \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}$, $s = (g,h,i)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ erhält man

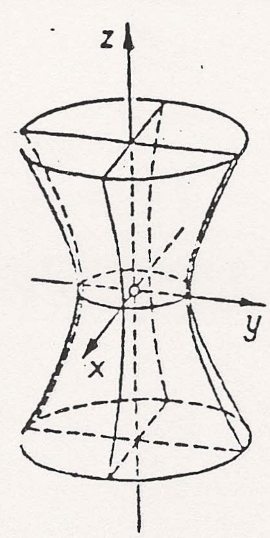
$$x^t \cdot A \cdot x + s \cdot x + j = 0$$

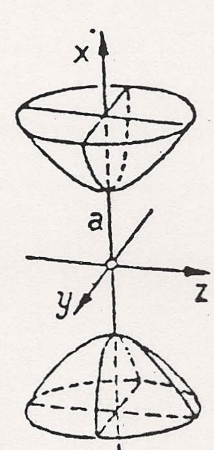
und geht wie vorher vor. Abgesehen von ausgearteten Fällen ($\emptyset$, Punkt, Gerade, Ebene, Ebenenpaar, ganzer $\mathbb{R}_3$) erhält man folgende Fälle:

Es gibt einen Mittelpunkt:	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$:
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$:	Ellipsoid
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$:	Einschaliges Hyperboloid
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$:	Zweischaliges Hyperboloid
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$:	Elliptischer Zylinder
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$:	Hyperbolischer Zylinder
Ohne Mittelpunkt:	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$:
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$:	Kegel
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$:	ebenfalls Kegel
bzw.	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = x_3$:
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$:	Elliptisches Paraboloid
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$:	Hyperbolisches Paraboloid
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$:	Parabolischer Zylinder
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$:	ebenfalls parabolischer Zylinder

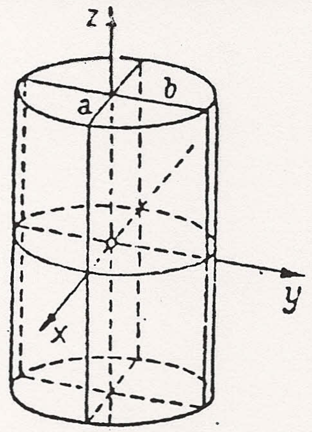
Ellipsoid: Einschaliges Hyperboloid: Zweischaliges Hyperboloid



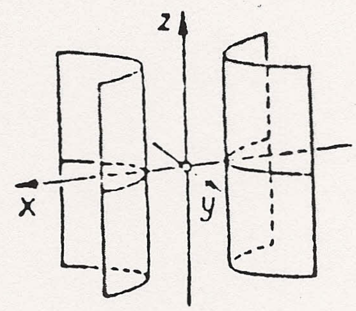




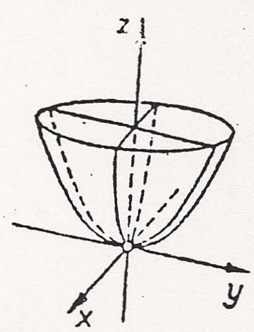
Elliptischer Zylinder:



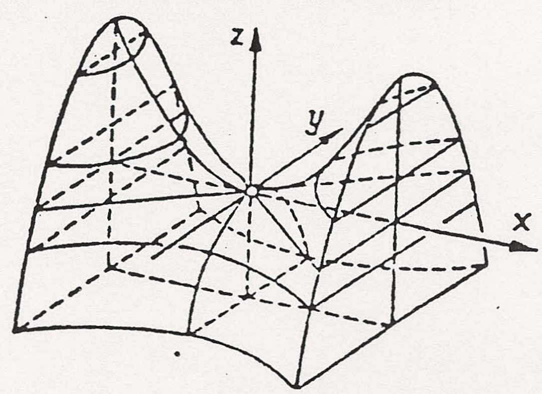
Hyperbolischer Zylinder



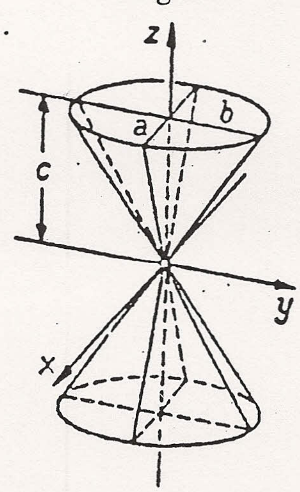
Elliptisches Paraboloid:



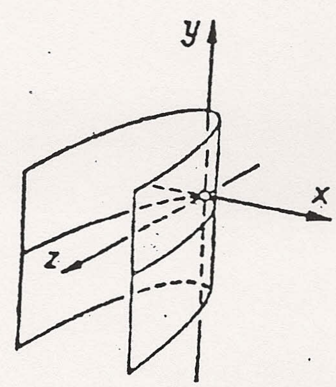
Hyperbolisches Paraboloid



Kegel:



Parabolischer Zylinder



58.15 Freie Rotationsachsen. In den Punkten $x^{(1)},\ldots,x^{(k)}$ des $\mathbb{R}_3$ seien punktförmige Massen $m_1,\ldots,m_k$ angebracht. Die Punkte seien mit $\mathbf{o}$ starr verbunden (wir nehmen der Einfachheit halber an, daß die Verbindungsstäbe masselos sind). Jede Gerade g durch $\mathbf{o}$ heißt eine ***freie Rotationsachse***, wenn das System so um g rotieren kann, daß auf g (also auf die "Lager") keine Zentrifugalkräfte ausgeübt werden.

Gibt es solche freien Rotationsachsen; wenn ja, wieviele, und welche Geraden sind es?

Rotiert der Punkt $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit Masse m um g mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so wählen wir einen Vektor w auf g mit Länge ω. Aus der Physik weiß man, daß der Drehimpuls $d = mx \times (w \times x)$ entsteht. Ausrechnen ergibt (15.10 c) verwenden!)

$$d = m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot w.$$

Der gesamte Drehimpuls ist die Summe der einzelnen Drehimpulse, also

$$d_{ges} = \begin{pmatrix} \Sigma(y_i^2 + z_i^2)m_i & -\Sigma x_i y_i m_i & -\Sigma x_i z_i m_i \\ -\Sigma x_i y_i m_i & \Sigma(x_i^2 + z_i^2)m_i & -\Sigma y_i z_i m_i \\ -\Sigma x_i z_i m_i & -\Sigma y_i z_i m_i & \Sigma(x_i^2 + y_i^2)m_i \end{pmatrix} \cdot w =: T \cdot w$$

T heißt in der Physik der ***Trägheitstensor*** des Massensystems. T ist stets symmetrisch. Es ist klar, was jetzt kommt.

Die durch w bestimmte Achse ist genau dann frei, wenn d_{ges} und w dieselbe Richtung besitzen, wenn also w ein Eigenvektor von T ist.

Fazit: Es gibt nach 58.4 stets genau 3 freie Rotationsachsen(außer $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Sei z.B. $T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Aus 58.6 wissen wir: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ repräsentieren die drei freien Rotationsachsen.