

# Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

## 14. Übungsblatt für den 27.6.2005

1. Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie näherungsweise  $e^A$ .

2. Warum ist folgender „Beweis“ des Satzes von Cayley-Hamilton kein Beweis:

Satz von Cayley-Hamilton (59.1.):  $\bar{c}_A(A) = 0$

Beweis:  $\bar{c}_A(x) = \det(Ex - A) \Rightarrow \bar{c}_A(A) = \det(EA - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$

3. (a) Berechnen Sie  $A^{-1}$  für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  mit Hilfe von  $c_A$  von Hand, machen Sie aber die Probe mit MATHEMATICA.

(b) Berechnen Sie  $A^7$  für obiges  $A$  mit Hilfe von  $c_A$  und machen Sie die Probe mit MATHEMATICA.

4. Sei  $A \in (\mathbb{Z}_{13})_{48}^{48}$ . Bestimmen Sie die Dimension der linearen Hülle von  $M = (A^i \mid i \in \mathbb{N})$

5. Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_6^6$  Bestimmen Sie das **Minimalpolynom** von  $A$

(Nebenrechnungen mit MATHEMATICA)

6. (Fortsetzung von Beispiel 5, um das Bsp. anzukreuzen, lösen Sie bitte alle drei Unterpunkte) (Sie dürfen „Nebenrechnungen“ mit MATHEMATICA ausführen)

(a) Bestimmen Sie Eigenwerte, -vektoren und -räume von  $A$ , sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten

(b) Beantworten Sie die Frage, ob  $A$  diagonalisierbar ist, mit Hilfe von (a)

(c) besitzt  $A$  eine Jordan'sche Normalform? Falls ja, bestimmen Sie sie und überprüfen Sie die Normalform mit MATHEMATICA (**JordanDecomposition[A]**)

7. Zeigen Sie Satz 59.16

8. Gegeben sei folgendes Leslie-Matrix-Populationsmodell:

$$L = \begin{pmatrix} 1/4 & 9/8 & 11/16 & 1/8 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(a) Interpretieren Sie die Angabe (was bedeuten die Zahlen/Zeilen/Spalten?)

(b) bestimmen Sie die Population nach „sehr langer Zeit“

(alle Nebenrechnungen mit MATHEMATICA)

9. Bestimmen Sie eine Singulärwert-Zerlegung  $A=W \Sigma U^t$  von  $A = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{9}{10} & -4 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 3 \end{pmatrix}$

und machen Sie die Probe mit MATHEMATICA.

10. (MATHEMATICA) Lösen Sie das überstimmte Gleichungssystem:

$$2x - 2y = 3$$

$$x - 3y = 1$$

$$x + y = 3$$

mit Hilfe der Moore-Penrose-Inversen.