Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

13. Übungsblatt für den 20.6.2005

1. Zeigen Sie folgende Variante des Satzes von Gerschgorin:
   sei $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}_n^n$ und sei λ ein Eigenwert von *A*, so gilt:

   $$|\lambda| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$$

2. Wir verallgemeinern den Begriff „Eigenwert“, wenn keine Matrix vorliegt:

   sei V ein Vektorraum, wobei dim(V) nicht notwendigerweise endlich ist und sei
   $h \in \mathrm{Hom}(V,V)$, dann heißt λ ein Eigenwert von h : $\Leftrightarrow \exists\, v \in V\backslash\{o\} : h(v) = \lambda v$

   Zeigen Sie:
   $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von h $\Leftrightarrow -h + \lambda\, id_V$ ist nicht injektiv.

3. Zeigen Sie jetzt mit Hilfe von Beispiel 2 folgende (bereits bekannte) Aussage:

   Ist dim(V) endlich, so gilt weiters (mit $c_h := c_{A_{h;B,B}}$ für eine Basis B)
   $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von h $\Leftrightarrow c_h(\lambda)=0$

4. Lösen Sie folgendes „gekoppelte“ System linearer Differentialgleichungen (Nebenrechnungen mit Computer, etwa MATHEMATICA, sind erlaubt)

   $$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \text{ mit Anfangsbedingungen: } \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Ein Teilchen startet eine zufällige Wanderung auf den ganzen Zahlen der Zahlengerade im Punkt 0, nach folgenden Regeln:
   Mit Wahrscheinlichkeit ¼ geht das Teilchen um eins nach links, mit Wahrscheinlichkeit ¼ bleibt das Teilchen wo es ist und mit Wahrscheinlichkeit ½ geht das Teilchen um eins nach rechts. Gelangt es in die Punkte -2 oder +2, so ist es gefangen!
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich das Teilchen nach sehr sehr langer Zeit in den Punkten -2,-1,0,1,2 befindet. Nebenrechnungen mit MATHEMATICA sind wieder erlaubt!

6. Bestimmen Sie die Translation und die Drehung, die den Kegelschnitt
   $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 8y + 2 = 0$
   in seine Normalform überführt.
   (Nebenrechnungen mit MATHEMATICA erlaubt)

7. (a) Zeigen Sie: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt mehrere Gleichgewichtszustände.

(b) Finden Sie, falls möglich, eine stochastische Matrix, die keinen Gleichgewichtszustand besitzt.

8. Eine Bakterienkultur bestehe aus 200 Bakterien vom Typ I, 300 vom Typ II und 1000 vom Typ III. Von einer Generation zur nächsten transformieren sich die Bakterien gemäß:

$$\begin{aligned} x1' &= 87/70\ x1 + 8/35\ x2 \\ x2' &= 3/35\ x1 + 67/70\ x2 \\ x3' &= \qquad\qquad\qquad\qquad 11/10\ x3 \end{aligned}$$

(a) Wieviele Bakterien existieren nach 12 Generationen? („intelligentes“ Berechnen!)
(b) Welchen Anteil an der Gesamtmenge haben die 3 Bakterientypen nach „sehr langer Zeit“ ?