Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
9. Übungsblatt, für den 23.Mai 2005

1. Ist $\sigma : ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mapsto u_1v_1 - u_2v_2$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$?

2. (Bsp. 50.2 b der Vorlesung) Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, sei $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (v, w) \mapsto v \cdot (A^t \cdot \bar{A}) \cdot w^t$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^n, \sigma)$ ein komplexer innerer Produktraum ist.

3. Sei (V, σ) ein unitärer Raum mit der von σ induzierten Norm $||.||$. Zeigen Sie, dass σ durch $||.||$ eindeutig bestimmt ist.

   Hinweis: Zeigen Sie für alle $x, y \in V$:

   $$4\sigma(x, y) = ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2.$$

   Ist auch in Euklidischen Räumen das Skalarprodukt durch die induzierte Norm eindeutig bestimmt?

4. (Bsp. 50.5 der Vorlesung) Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$ nicht von einem inneren Produkt induziert wird.

5. Ist die Hamming-Distanz auf $\mathbb{Z}_2^n$ eine Metrik?

6. Orthonormalisieren Sie die folgenden Familien von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des gewöhnlichen Skalarprodukts mit dem Verfahren von Gram-Schmidt:

   (a) $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

   (b) $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

7. **Legendre'sche Polynomfunktionen.** Sei $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^i$, für $i \in \{0, 1, 2\}$. Orthonormalieren Sie $\{f_0, f_1, f_2\}$ bezüglich des inneren Produkts $\sigma(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

8. Zeigen Sie: Sei σ ein inneres Produkt auf $V := \mathbb{R}^n$. Sei B eine Basis von V, und sei D die zu B gehörige mit dem Verfahren von Gram-Schmidt orthonormalisierte Basis. Dann sind B und D gleich orientiert.