Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

8. Übungsblatt für den 9.5.2005

1./2.. [zählt für zwei Kreuzerl wegen größeren Rechenaufwands]

Sei $\sigma : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \to x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot y^t$.

Finden Sie eine Basis *B* von $\mathbb{R}^4$, sodass $A_{\sigma;B,B} = diag(+1,\ldots,+1,-1,\ldots,-1,0,\ldots,0)$

3. (a) Welche der Eigenschaften aus 48.4 treffen auf obiges σ zu?
(b) Bestimmen Sie Index und Signatur von σ

4. Für welche *a* sind folgende Matrizen über dem angegebenen Ring invertierbar?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^2$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & a & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_6)_3^3$

5. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Voraussetzung $1+1\neq 0$ in Satz 47.11. tatsächlich notwendig ist. (D.h., dass die Äquivalenz dann nicht mehr erfüllt ist)

6. Zeigen oder widerlegen Sie:
(a) *A*, *B* symmetrisch $\Rightarrow$ $A \cdot B$ symmetrisch
(b) *A*, *B* positiv definit $\Rightarrow$ $A \cdot B$ positiv definit

7. $A \in \mathbb{C}_n^n$ heißt *schief-hermitesch*, falls $A^T = -\overline{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie:
(a) Jede Matrix $A \in \mathbb{C}_n^n$ ist Summe einer hermiteschen und einer schief-hermiteschen Matrix.
(b) Ist *A* hermitesch, so ist $i \cdot A$ schief-hermitesch.

8. Sei $\langle,\rangle_A$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \cdot A \cdot y^t$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
(a) ist $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle_A)$ ein Euklid'scher Raum?
(b) orthonormalisieren Sie für obiges $\langle,\rangle_A$ die kanonische Basis nach Gram-Schmidt.