# Übungen zu
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
# 7. Übungsblatt, für den 2.Mai 2005

1. Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{Z}_n^n$ mit $a_{ij} = i + j - 1$. Zeigen Sie, dass $det(A) = 0$ für $n \geq 3$ gilt.

2. Zeigen oder widerlegen Sie für quadratische und reguläre Matrizen $A, B$:

   (a) $det(A + B) \geq det(A - B)$,

   (b) $det(A^{-1}) + det(B^{-1}) \geq det(A^{-1} + B^{-1})$,

   (c) $A \sim B \Rightarrow det(A) = det(B)$.

3. Berechnen Sie $A_{ad}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ und bestimmen Sie daraus die inverse Matrix von $A$.

4. Seien $A, B \in \mathbb{R}_n^n$ reguläre Matrizen. Zeigen Sie: $(A \cdot B)_{ad} = B_{ad} \cdot A_{ad}$.

5. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit der Cramer'schen Regel:
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= -1 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

6. Berechnen Sie $det(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}[x])_4^4$. Ist $A$ invertierbar?

7. Sei $V$ ein Vektorraum über einen Körper $K$ und $\sigma : V \times V$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $d : V \to K$ definiert als $d(x) := \sigma(x, x)$. Zeigen Sie, dass

   (a) für alle $x, y \in V$ gilt $\sigma(x + y, x - y) = d(x) - d(y)$,

   (b) für alle $x, y \in V$ gilt $d(x + y) + d(x - y) = 2(d(x) + d(y))$,

   (c) für alle $x, y \in V$ ein Polynom $p \in K[x]$ existiert mit $Gd(p) \leq 2$, so dass $\forall t \in K : d(x + ty) = \overline{p}(t)$.

8. Sei $\sigma : (\mathbb{R}_3)^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 4y_1 + 8y_2 - 6y_3 \\ 8y_1 - 5y_2 + y_3 \\ -6y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$.
   Finden Sie eine Basis $C$ des $\mathbb{R}_3$, so dass, $A_{\sigma;C,C}$ Diagonalform hat.