Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

5. Übungsblatt für den 18.4.2005

1. Eine Gruppe $(G,\circ)$ heißt *zyklisch*, $\Leftrightarrow \ \exists a \in G : \forall x \in G : \exists m \in \mathbb{Z} : x = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{m-mal} =: a^m$.
   Ein solches $a \in G$ heißt ein *erzeugendes Element* von *G*.
   (a) Zeigen Sie: jede zyklische Gruppe ist abelsch.
   (b) Bei welchen der folgenden Verknüpfungsgebilden handelt es sich um zyklische Gruppen? Geben Sie jeweils alle erzeugenden Elemente an: ($\mathbb{C}$,+), ($\mathbb{R}$,+), ($\mathbb{Q}$,+), ($\mathbb{Z}$,+), ($\mathbb{Z}_{\mathbf{n}}$,+), ($\mathbb{N}$,+)

2. Zeigen Sie: Seien $(G_1,\circ_1)$ und $(G_2,\circ_2)$ Gruppen und sei $h : G_1 \to G_2$ ein Gruppen**epi**morphismus. Dann gilt:
   (a) $(G_1,\circ_1)$ ist abelsch $\Rightarrow$ $(G_2,\circ_2)$ ist abelsch
   (b) $(G_1,\circ_1)$ ist zyklisch $\Rightarrow$ $(G_2,\circ_2)$ ist zyklisch

3. Überprüfen Sie, ob es sich bei folgenden Abbildungen um Gruppenhomomorphismen handelt:
   f: ($\mathbb{R}$,+) $\to$ ($\mathbb{R}^2_2$, +), $x \to \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ g: (P($\mathbb{N}$), Δ) $\to$ (P($\mathbb{N}$), Δ), $M \to C_{IN} M$
   h: ($\mathbb{Z}$,+) $\to$ ($\mathbb{Z}_{\mathbf{p}}$*, ·), $z \to \begin{cases} [1]_p & \text{für } [z]_p = [0]_p \\ [z]_p & \text{sonst} \end{cases}$

4. (a) Ist jede Untergruppe der ($S_3,\circ$) ein Normalteiler? (Beweis oder Gegenbeispiel!)
   (b) Wie (a) für ($\mathbb{Z}_{\mathbf{n}}$,+)

5. (a) Seien *R*, *S* Ringe mit Einselement 1 bzw. 1' und sei *h* ein Ring**epi**morphismus von *R* nach *S*. Zeigen Sie $h(1) = 1'$
   (b) finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, dass *h* **nicht** surjektiv ist. Zeigen Sie aber auch, dass es sich bei *h* wirklich um einen Ringhomomorphismus handelt.

6. (a) Zeigen Sie für endliche Gruppen G mit neutralem Element 1 und $g \in G$:
   Die Menge <g> := $\{1, g, g^2, \ldots\}$ ist eine Untergruppe von G (die „*von g erzeugte zyklische Untergruppe*“)
   (b) Zeigen Sie unter obigen Voraussetzungen: $g^{|G|} = 1$ („kleiner Satz von Fermat“)’
   [Hinweis: Verwenden Sie Satz 38.9]

7. (a) Verwenden Sie die Lagrange’sche Interpolationsformel, um ein Polynom zweiten Grades durch die Punkte (0,3), (1,2) und (2,3) $\in \mathbb{R}^2$ zu legen.
   (b) Interpolieren Sie mit MATHEMATICA

8. (a) Sei $p = x^2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Finden Sie ein Polynom *q* vom Grad 3 über $\mathbb{Z}_3$, sodass $\overline{p} = \overline{q}$, aber mit $p \neq q$
   (b) Zeigen oder widerlegen Sie:
   Sei $p = id \in \mathbb{Z}_p[x]$ und sei $q \in \mathbb{Z}_p[x]$, mit $\overline{p} = \overline{q}$, dann gilt: $p = q$
   (c) Sei $p = 2x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_4[x]$.
   Welche Elemente aus $\mathbb{Z}_4[x]$ sind Nullstellen von *p*? Haben wir jetzt Satz 40.9. widerlegt?