

Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
3. Übungsblatt, für den 4. April 2005

Lineare Funktionale, Darstellungsmatrizen, Basistransformationen, affine Abbildungen:

1. Sei $V = P_n(\mathbb{R})$ und für $0 \leq i \leq n$ sei

$$d_i : V \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto p^{(i)}(0)$$

das lineare Funktional, welches für eine Polynomfunktion p die i -te Ableitung $p^{(i)}$ von p an der Stelle 0 auswertet.

Zeigen Sie, dass $(d_i)_{0 \leq i \leq n}$ eine Basis von V^* bildet.

2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Zeigen Sie:

$$\forall \varphi, \psi \in V^* : (\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \Rightarrow \exists \lambda \in K : \varphi = \lambda \psi)$$

Hinweis: Für $\psi(v_0) \neq 0$ setzen Sie $\lambda = \varphi(v_0)/\psi(v_0)$.

3. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix für die lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y + 3z, -x + 2z)$

(a) bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

(b) bezüglich $B = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (2, 7, 1))$ und $C = ((1, -1), (1, 3))$.

Geben Sie $\text{Ker } h$ und $\text{Im } h$ an.

4. Geben Sie für den Homomorphismus

$$h : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R}), p \mapsto (1 - x) \cdot p,$$

die Darstellungsmatrix $A_{h;B,C}$ bezüglich der Basen $B = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ und $C = (1, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3)$ an.

5. Sei d_α die lineare Abbildung, die einer Drehung der Vektoren des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn mit Mittelpunkt $(0, 0)$ entspricht.

Weiters sei s_β jene lineare Abbildung, die einer Spiegelung an einer durch $(0, 0)$ gehenden unter dem Winkel β zur x -Achse geneigten Geraden entspricht.

Geben Sie Matrixdarstellungen für d_α und s_β bezüglich der kanonischen Basis an. Bildet $\{d_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi[\} \cup \{s_\beta \mid \beta \in [0, 2\pi[\}$ eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführen?

6. Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}_2^2$ mit Basen $B = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix})$ und $C = (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$. Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix A_C^B .
7. Die Abbildung, die jedem Vektor eines Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$, den ihm nächstliegenden Vektor eines Unterraums $U \leq V$ zuordnet, ist linear und heißt *Projektion*.
- (a) Finden Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass die Darstellungsmatrix $A_{P_U; B, B}$ der Projektion P_U auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$ die Gestalt $E^{(r)}$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ hat.
Muß eine solche Basis B immer existieren?
- (b) Geben Sie für die kanonische Basis E des $\mathbb{R}^3$ und für B aus (a) die Basistransformationsmatrix A_B^E sowie $A_{P_U; E, E}$ an.
8. Ist die Spiegelung s der Punkte des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $g : 3x - y = 5$ eine affine Abbildung? Falls ja, geben Sie die Funktion in der Form $s(x) := A \cdot x + c$ an.