Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
1. Übungsblatt, für den 7. März 2005

1. Bestimmen Sie — sofern möglich — die Inversen der folgenden Matrizen. Überprüfen Sie Ihre Resultate mit Mathematica.
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \in (\mathbb{R})_3^3, \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_3)_3^3, \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)_3^3.$$

2. Sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem mit
$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & a\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4^4 \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4.$$
   (a) Bestimmen Sie den Rang von A und $(A, b)_{matrix}$.
   (b) Für welche $a, c \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

3. (Fortsetzung von Beispiel 2) Bestimmen Sie den Nullraum von A sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $a = 1$ und $b = 2$.

4. Gegeben sei die Matrix $A \in (\mathbb{Z}_5)_3^4$ mit
$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie den Rang r der Matrix und geben Sie reguläre Matrizen $B \in (\mathbb{Z}_5)_3^3$ und $C \in (\mathbb{Z}_5)_4^4$ an, so dass $B \cdot A \cdot C = E^{(r)}$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Mathematica.

5. Wie groß ist die maximale Anzahl an Einsern in einer Matrix aus $(\mathbb{Z}_2)_n^n$, so dass die Matrix noch regulär ist?

6. Überprüfen Sie mittel Berechnung des Ranges einer Matrix, ob die vier Vektoren
   (a) $(1, 2, 2, 2), (2, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 2), (2, 2, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$ bzw.
   (b) $(1, 1, 2, 2), (2, 1, 1, 2), (2, 2, 1, 1), (1, 2, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$

   linear unabhängig sind und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Mathematica.

7. Äquivalente Matrizen: Zeigen oder widerlegen Sie für reguläre quadratische Matrizen $A \sim B \Rightarrow A^t \sim B^t$.