12. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Sommersemester 2002

1. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis B und $\sigma \in \mathrm{Bil}(V,V)$ symmetrisch. Seien A und A' kongruente symmetrische Matrizen aus $\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$. Man beweise: (a) A positiv definit $\Leftrightarrow$ A' positiv definit. (b) σ positiv definit $\Leftrightarrow$ $A_{\sigma;B,B}$ positiv definit.

2. Sei $\sigma \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\sigma((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$. (a) Man finde eine Basis C des $\mathbb{R}^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodaß $\sigma(v,w) = \alpha\, v_1w_1 + \beta v_2w_2$ für $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $v = (v_1,v_2)_C$ und $w = (w_1,w_2)_C$. (b) Ist σ positiv definit? (c) Welcher Kegelschnitt wird durch $\{v \in \mathbb{R}^2 : \sigma(v,v) = 1\}$ dargestellt?

3. Für $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$ finde man $T \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$, sodaß $T^tAT = \mathrm{diag}(d_1,d_2)$ mit $d_1, d_2 \in \{-1,0,1\}$:

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (b)\quad A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome in x vom Grad ≤ 3 mit den Basen $B = (1, x, x^2, x^3)$ und $C = (1, \nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$. (Erinnerung: $\nu_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$.) Sei h die lineare Abbildung des Differenzierens, d.h. $h : V \to V, p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 \mapsto p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2$. Man berechne: (a) A^B_C, (b) A^C_B, (c) $A_{h;B,B}$, (d) $A_{h;C,C}$, (e) $A_{h;B,C}$, (f) $A_{h\circ h;B,B}$.

5. Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A_i. Man vergleiche die Summe der Eigenwerte mit der Spur und das Produkt mit der Determinante:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Man berechne, falls möglich, die Cholesky-Faktorisierung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$