Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
11. Übungsblatt für den 9. Jänner 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Zeigen Sie mit oder ohne Satz von Schröder-Bernstein, dass A und B gleichmächtig sind:
   (a) $A =]0,1]$ und $B = [1,\infty[$,
   (b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1\}$,
   (c) $A =]0,1[^2$ und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Schröder-Bernstein, daß für beliebige Mengen A, B, C gilt:
$$(|A| = |C| \wedge A \subseteq B \subseteq C) \implies |A| = |B|.$$

3. A und B seien beliebige Mengen. Man zeige:
   (a) $A \times B$ und $B \times A$ sind gleichmächtig,
   (b) $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$,
   (c) Für Kardinalzahlen α und β gilt stets $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

4. A, B und Y seien beliebige Mengen. Man zeige:
   (a) Y^{B^A} und $Y^{A \times B}$ sind gleichmächtig,
   (b) $|Y|^{|B|^{|A|}} = |Y|^{|A| \cdot |B|}$,
   (c) Für Kardinalzahlen α, β, γ gilt $\gamma^{\beta^\alpha} = \gamma^{\alpha \cdot \beta}$.

5. Zeigen Sie für einen Vektorraum ${}_K V$:
   (a) $\lambda \mathbf{o} = \mathbf{o}$,
   (b) $0v = 0$,
   (c) $(-\lambda)v = -\lambda v = \lambda(-v)$.

6. (a) Ist $V = \mathbb{R}^2$ mit $\lambda(x,y) := (x, \lambda y)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?
   (b) Ist $V = \mathbb{R}^2$ mit $\lambda(x,y) := (\frac{\lambda}{3}x, \frac{\lambda}{3}y)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

7. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume der $\mathbb{R}^2$?
   (a) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1\}$
   (b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$
   (c) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1 - 3x_2 = 0\}$
   (d) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = c\}$
   (e) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$

8. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ bezüglich der Addition $+ : \mathbb{R}^\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und der Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}, (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$.
   (a) Ist $U_1 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
   (b) Ist $U_2 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
   (c) Bestimmen Sie $U_1 \cap U_2$!
   (d) Ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?