Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
10. Übungsblatt für den 12. Dezember 2011

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Überprüfen Sie, ob bei folgenden geordneten Mengen die Voraussetzungen für das Axiom von Zorn erfüllt sind :
   (a) $(\mathbb{N}, |)$
   (b) $(\mathbb{N}, \geq)$

2. (a) Finden Sie (etwa anhand der Verknüpfungstabelle) Untergruppen von $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ für $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
   (b) Welche Untergruppen wird $(\mathbb{Z}_{24}, \oplus)$ haben? Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, wie die vollständige Liste der Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{24}, \oplus)$ aussieht.
   (c) Beweisen Sie die Vermutung! — Wichtig ist dabei vor allem die Vollständigkeit der Liste, d.h., zu zeigen, dass es keine weiteren Untergruppen ausser denen in Ihrer Vermutung von Punkt (b) gibt.

3. Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen verträglich mit Addition, bzw. Multiplikation sind:
   (a) in $\mathbb{Q} : x \sim y :\Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
   (b) in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : (x, y) \sim (u, v) :\Leftrightarrow xv = yu.$

4. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} 3r + 2s + 3t + 4u &= 0 \\ 2r + 1s + 2t + 3u &= 3 \\ 3r + 0s + 3t + 1u &= 3 \end{aligned}$$

5. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_6$:
   (a)

$$\begin{aligned} 5x + z &= 4, \\ 3y + z &= 0, \\ 5z &= 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 5x + z &= 4, \\ 3y + z &= 0, \\ 2z &= 1 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1 \\ 2x + 2y + 1z &= 0 \\ 5x + 2y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

6. Welche der folgenden Tripel sind Ringe bzw. Körper? Welche sind Unterringe, bzw. Unterkörper von $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?

   (a) $(\{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}, +, *) =: n\mathbb{Z}$ (für ein fixes $n \in \mathbb{N}$)

   (b) $(\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}, +, *)$

   (c) $(\{a + b\pi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, *)$

7. Gibt es Verknüpfungen $\triangle, \square$, sodass $(\mathbb{N}, \triangle, \square)$ ein Körper ist?

8. Überprüfen Sie bei den folgenden Mengenpaaren, ob die Mengen gleichmächtig sind, geben Sie gegebenenfalls eine Bijektion an und bestimmen Sie die Kardinalität:

$$
\begin{array}{lrll}
(a) & \{A, B, C\}, & \{\{A\}, \{B\}, \{C\}\} & \\
(b) & \mathbb{N}, & 6\mathbb{Z} & \\
(c) & \emptyset, & \{\emptyset\} & \\
(d) & [0,1], & [a,b], & \text{wobei } a < b
\end{array}
$$