Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
9. Übungsblatt für den 5. Dezember 2011

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Zeigen Sie: die lexikographische Ordnung (siehe Definition 12.8) ist transitiv.
2. Auf $M := \mathbb{R}^{[0,1]}$, der Menge der Funktionen vom Intervall $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, sei eine Äquivalenzrelation gegeben durch
$$f \sim g :\Leftrightarrow f(1) = g(1)$$
(für alle $f, g \in M$).
   (a) Geben Sie die Äquivalenzklasse $[f]$ der Funktion $f(x) := x^2$ explizit an.
   (b) Geben Sie die Faktormenge $M/\sim$ explizit an.
   (c) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.
3. (a) Worin unterscheiden sich Ordnungsrelationen und Äquivalenzrelationen?
   (b) Welche Relationen sind gleichzeitig Ordnungsrelationen und Äquivalenzrelationen?
   (c) Welche davon sind funktional?
4. Gegeben sei die geordnete Menge $A = \mathbb{Q}$, mit der üblichen Ordnung $\leq$, und die Teilmenge $B := \{x \in A | x > 0 \wedge x^2 < 2\}$.
   (a) Geben Sie untere und obere Schranken von B (in A) an.
   (b) Besitzt B ein Infimum (in A)?
   (c) Ein Supremum (in A)?
   (d) Was ändert sich (was bleibt gleich) in den vorigen Punkten, wenn $A = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ genommen wird?
5. • Zeigen Sie: die Menge *a*ller Relationen auf A bilden bezüglich des Relationenprodukts $R \diamond S$ (siehe 13.11) ein Monoid.
   • Zeigen Sie weiters: der Gruppenkern (siehe Def. 13.6) dieses Monoids ist die Gruppe aller Permutationen (bijektiven Funktionen) auf A.
6. Sei $(A, \circ)$ eine Gruppe (zur Veranschaulichung denke man etwa an $(\mathbb{Z}, +)$). Definiere auf der Potenzmenge von A ein Verknüpfungsgebilde $(P(A), \star)$ durch
$$X \star Y := \{a \circ b | a \in X, b \in Y\},$$
für alle $X, Y \subseteq A$.
   (a) Ist $(P(A), \star)$
      - eine Halbgruppe (ist $\star$ assoziativ ?),
      - ein Monoid (gibt es auch ein neutrales Element ?)
      - oder gar eine Gruppe (gibt es auch alle inversen Elemente)?
   (b) Ist $(P(A) \setminus \{\emptyset\}, \star)$
      - ein Monoid, eine Halbgruppe oder überhaupt ein Verknüpfungsgebilde?