Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
8. Übungsblatt für den 28. Noveber 2011

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Seien A, B Mengen, $f\colon A \to B$ eine Funktion, $M, L \subseteq A$ und $X, Y \subseteq B$ Teilmengen von A bzw. B. Zeigen Sie:
   (a) $f(M \cup L) = f(M) \cup f(L)$.
   (b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
   (c) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

2. Seien A, B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Funktion.
   (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
      (i) f ist injektiv.
      (ii) Für alle $X, Y \subseteq A$ gilt $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
      (iii) Für alle $X \subseteq A$ gilt $f^{-1}(f(X)) = X$.
   (b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
      (i) f ist surjektiv.
      (ii) Für alle $X \subseteq B$ gilt $f(f^{-1}(X)) = X$.

3. Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist surjektiv genau dann, wenn für alle Funktionen $g, h\colon B \to C$ gilt:
$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

4. Für welche Mengen A sind die folgenden Relationen auf A Äquivalenzrelationen?
   (a) $R_1 := A \times A$,
   (b) $R_2 := \{(x, x) \mid x \in A\}$,
   (c) $R_3 := \emptyset$.

5. Sei A eine Menge. Auf $P(A)$ ist eine Relation R gegeben durch
$$(M, N) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine bijektive Abbildung } f\colon M \to N.$$
   Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\equiv_n$ ist genau dann feiner als $\equiv_m$, falls m ein Teiler von n ist.

7. Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R \subseteq A \times A$ mit $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (4, 5)\}$. Geben Sie explizit als Menge an
   (a) die feinste Äquivalenzrelation $\sim$ auf A mit $R \subseteq \sim$,
   (b) K_1,
   (c) $A/\sim$,
   (d) ein Repräsentantensystem von A bzgl. $\sim$.

8. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x-y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Äquivalenzklasse von $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie ein Repräsentantensystem für $\mathbb{R}^2/\sim$.