**Übungen zu**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1**
**7. Übungsblatt für den 21. November 2011**

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   (a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
2. Sei $A$ eine $n$-elementige Menge. Zeigen sie, dass $\mathcal{P}(A)$ stets $2^n$ Elemente hat.
3. Zeigen Sie: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Falls $a|c,\ b|c$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, dann gilt $ab|c$.
4. Bestimmen Sie alle Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ der folgenden Gleichungen:
   (a) $17x + 13y = 5$;
   (b) $100x + 44y = 5$;
   (c) $100x + 44y = 8$.
5. Gegeben seien $a = 8568$ und $b = 1309$.
   (a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $a$ und $b$.
   (b) Bestimmen Sie sowohl den $ggT(a, b)$ als auch das $kgV(a, b)$ auf zwei verschiedene Arten.
6. (a) Die Fermat'schen Zahlen $F(n)$ sind durch $2^{2^n} + 1$ definiert. Sind alle Fermat'schen Zahlen Primzahlen?
   (b) Ist 1111111111111111111 eine Primzahl?
   (c) Ist 9999999999999641 und 9999999999999643 ein Primzahlpaar?
   (d) Finden sie die Primfaktorzerlegung von 5199204187555357 76857

   *Hinweis: Verwenden sie dazu Mathematica.*
7. (a) Sei $A$ eine Menge. Zeigen oder widerlegen Sie: Eine transitive und symmetrische Relation auf $A$ ist auch reflexiv.
   (b) Sei $A = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede Kombination der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv eine Relation $\emptyset \neq R \subseteq A \times A$ an.
8. Sei $A$ eine Menge. Zeigen oder widerlegen Sie:
   (b) Es gibt keine Relation auf $A$, die sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.
   (c) Eine reflexive, symmetrische und antisymmetrische Relation auf $A$ ist funktional.