Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
5. Übungsblatt für den 7. November 2011

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B, C:
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$
(Zur Erinnerung: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, $A \setminus B := \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$.)

2. Suchen Sie 'Gegenbeispiele':
   (a) Geben Sie Aussagen A und B an, sodass $A \Longrightarrow B$ und $B' \Longrightarrow A'$ gilt, nicht aber $B \Longrightarrow A$.
   (b) Geben Sie Aussagen A und B an, sodass $(A \vee B)'$ und $(A' \wedge B')$ gelten, nicht aber $(A' \dot{\vee} B')$.

3. 'Übersetzen' Sie jeweils folgende Aussagen in 'natürliche' Sprache, überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage und schreiben Sie dann auch das Gegenteil in formaler Schreibweise:
   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0$
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \forall k \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}^+ : n^k \leq x$
   (c) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}^+ : \exists m \in \mathbb{N} : n \cdot m = x$

4. Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln folgender Aussageformen (versuchen Sie auch, Sätze 4.8 und 4.9 zur Vereinfachung zu verwenden):
   (a) $((a \Rightarrow b) \wedge a) \Rightarrow b$
   (b) $((a \wedge b') \Rightarrow c) \wedge ((a \wedge b') \Rightarrow c')$
   (c) $(a \dot{\vee} b) \Leftrightarrow ((a \wedge b') \vee (b \wedge a'))$
   (d) $(a \wedge b \wedge c') \Rightarrow (a' \vee b' \vee c)$

5. (Zu 6.7b:) Finden Sie – falls möglich – jeweils Konstante λ und μ, sodass $R = \lambda P + \mu Q$.
   (a) $R = (3, 2), P = (1, 0), Q = (0, 1)$
   (b) $R = (-1, 1), P = (1, 0), Q = (1, 1)$
   (c) $R = (2, 3), P = (1, -2), Q = (2, -4)$
   (d) $R = (-1, 3), P = (-1, 3), Q = (-2, 6)$

6. Gilt für das vektorielle Produkt
   (a) das Kommutativgesetz, also $P \times Q = Q \times P$
   (b) das Assoziativgesetz, also $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$

   für beliebige Vektoren $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$?

   Überprüfen Sie die Aussagen zunächst anhand 'einfacher' Vektoren (z.B. Einheitsvektoren, $(1, 0, 1)$, etc).

7. Zeigen Sie folgende Formel: für beliebige Vektoren $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3), R = (r_1, r_2, r_3)$ aus $\mathbb{R}^3$ gilt

$$(P \times Q) \cdot R = \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

8. Seien $P, Q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ zwei Vektoren, die zwei Seiten eines Dreiecks OPQ bilden. Der eingeschlossene Winkel sei θ. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|P - Q\|^2 = \|P\|^2 + \|Q\|^2 - 2 \cdot \|P\| \cdot \|Q\| \cdot \cos(\theta)$$

(das ist der ‘Cosinussatz’).