

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
4. Übungsblatt für den 31. Oktober 2011**

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, z\}$ und $C = \{0, 1, 2, 3\}$. Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählung sämtlicher Elemente an:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| (a) $A \times B \times A$, | (d) $P(\emptyset)$, |
| (b) $A \times A \times B$, | (e) $P(\{\emptyset\})$. |
| (c) $P(C)$, | |

2. Seien A, B Mengen mit $A \subset B$ und $B \setminus A = \{x\}$. Zeigen Sie:

$$P(B) = P(A) \cup \{M \cup \{x\} \mid M \in P(A)\}.$$

3. Seien A, B Mengen und $a, c \in A$, $b, d \in B$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$$

genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

Hinweis: Benutzen Sie das Fundierungssaxiom:

$$(\exists x_0 \dots x_n : x_0 \in x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \in x_n \in x_0)'.$$

("Keine Menge ist gleich einem ihrer Elemente oder gleich einem Element eines ihrer Elemente usw.")

4. Sei A eine Menge.

- (a) Zeigen Sie: $\emptyset \subseteq A$.
- (b) Wie viele leere Mengen gibt es?

5. Beschreiben Sie die folgenden Aussagen durch Aussageformen. Wenn wir davon ausgehen, dass die Aussage (a) wahr ist, was gilt dann für die übrigen?

- (a) Wenn die Mieten hoch sind, dann stehen viele Wohnungen leer oder die Vermieter machen hohe Gewinne.
- (b) Vermieter machen hohe Gewinne oder die Mieten sind nicht hoch oder viele Wohnungen stehen leer.
- (c) Wenn nur wenige Wohnungen leer stehen, dann machen die Vermieter hohe Gewinne oder die Mieten sind nicht hoch.
- (d) Wenn die Vermieter keine hohen Gewinne machen, dann stehen viele Wohnungen leer oder die Mieten sind nicht hoch.
- (e) Wenn viele Wohnungen leerstehen, dann sind die Mieten hoch und die Vermieter machen hohe Gewinne.
- (f) Die Mieten sind hoch und die Vermieter machen hohe Gewinne und viele Wohnungen stehen leer.

6. Seien a, b Aussageformen. Zeigen Sie:

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow a)) = \underline{W}.$$

7. Zeigen Sie: Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
Hinweis: Eine Schwerlinie in einem Dreieck verbindet eine Ecke des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.
8. Seien $P, Q \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

$$\|P + Q\|^2 + \|P - Q\|^2 = 2(\|P\|^2 + \|Q\|^2).$$