

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
1. Übungsblatt für den 10. Oktober 2011**

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form (d.h. in der Form $L = \{v + t_1v_1 + \dots + t_nv_n \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\}$, wobei v, v_1, \dots, v_n Vektoren sind) unter Verwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens. Wieviele Lösungen/wie viele frei wählbare Parameter hat das Gleichungssystem?

$$\begin{aligned} -z + y &= 3 \\ y - x + z &= 0 \\ x - 2z &= 3 \end{aligned}$$

2. Wie 1. für

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 0 \\ -x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

3. Wie 1. für

$$\begin{aligned} -a + 3b + c - 2d &= -3 \\ 2b - d + e &= -1 \\ a + b - c &= 1 \\ -a + b + c - d - e &= -2. \end{aligned}$$

4. Ein lineares Gleichungssystem in vier Variablen a, b, c, d habe zwei frei wählbare Parameter a und c in der Lösung und es gelte $b = 2$. Welche der folgenden Fälle können auftreten? (Begründung!)

- (a) a, c und d sind frei wählbar.
- (b) a und d sind frei wählbar.
- (c) a und b sind frei wählbar.
- (d) $a = 2$ und c sowie d sind frei wählbar.
- (e) a und c sind frei wählbar und $d = 2$.

5. Interpretieren Sie **geometrisch** (falls möglich):

Ein lineares Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen mit jeweils v_i Variablen ($i \in \{1, 2, 3\}$) und insgesamt drei Variablen, hat k frei wählbare Parameter in der Lösung, wobei

- (a) $v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 3, k = 0$,
- (b) $v_1 = v_2 = v_3 = 3, k = 1$,

(c) $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 2, k = 2,$

(d) $v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 3, k = 3.$

6. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$. Untersuchen Sie für die drei Fälle $n < m$, $n = m$ und $n > m$, ob ein lineares Gleichungssystem von n paarweise verschiedenen Gleichungen in m Variablen existiert, wobei alle Koeffizienten in allen Zeilen ungleich Null sind, sodass dieses System unendlich viele/keine/genau eine Lösung besitzt. Geben Sie für jeden dieser neun Fälle entweder ein Beispiel an (m und n dabei nicht auf bestimmte Zahlen fixieren) oder begründen Sie, warum der entsprechende Fall nicht auftreten kann.
7. Ein Logik-Beispiel zum Üben: Auf dem Tisch liegen vier Karten. Jede Karte zeigt auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Zahl. Die vorliegende Kartenreihe zeigt folgende vier Symbole:

A K 4 7.

Behauptung: Wenn eine Karte auf einer Seite einen Vokal trägt, dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl.

Welche der Karten muss man unbedingt umdrehen, um zu zeigen, dass diese Regel tatsächlich erfüllt ist?